

# Den 40e Nordiska matematiktävlingen

Fredagen, den 27 mars 2026

*Svenska*

1. Låt  $n \geq 3$  vara ett heltal. Det sitter  $n$  riddare runt ett runt bord. På bordet står  $n$  stearinljus, så att det mellan varje par riddare som sitter intill varandra står ett enda ljus. Vissa stearinljus (möjligtvis alla, möjligtvis inga) är tända. För  $i \in \{0, 1, 2\}$ , låt  $m_i$  vara antalet riddare som sitter intill exakt  $i$  tända ljus.

Finns det minsta möjliga värdet av  $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$ , uttryckt i termer av  $n$ .

2. Betrakta ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x^2 = y + 1, \\ xy = x + y. \end{cases}$$

Visa att om  $(x, y) = (x_0, y_0)$ , där  $x_0, y_0$  är reella tal, är en lösning till ekvationssystemet, så finns även en lösning  $(x, y) = (x_1, y_1)$ , där  $x_1, y_1$  är reella tal och  $y_1 x_0 = 1$ .

3. Låt  $ABCD$  vara en konvex fyrhörning sådan att  $BA = BC$ . De inre bisektriserna till vinklarna  $\angle DBA$  och  $\angle CBD$  skär mittpunktsnormalerna till  $AD$  och  $CD$  i  $E$  respektive  $F$ .

Visa att de omskrivna cirkelarna till  $\triangle DAC$  och  $\triangle DEF$  tangerar varandra.

*Anmärkning: En konvex fyrhörning är en fyrhörning i vilken alla vinklar är mindre än  $180^\circ$ .*

*Anmärkning: Den inre bisektrisen till en vinkel i en månghörning är sträckan som delar vinkeln i två lika delar.*

4. Ett par positiva heltal  $(a, b)$  kallas *gott* om alla bråken

$$\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \dots, \frac{a+9}{b+9}$$

är heltal.

- a) Visa att det endast finns ändligt många goda par  $(a, b)$  sådana att  $b < a < b^9$ .
- b) Visa att det finns oändligt många goda par  $(a, b)$  sådana att  $b < a < b^{10}$ .

*Skrivtid 4 timmar.*

*Varje problem är värt 7 poäng.*

*Endast skriv- och ritdon är tillåtna.*