Den 40. nordiske matematikkonkurransen

Fredag 27. mars 2026

Norsk versjon

Tid til rådighet er 4 timer. Hver oppgave er verdt 7 poeng.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1 La $n \geq 3$ være et heltall. Rundt et bord sitter n riddere. På bordet ligger n stearinlys, ett mellom ethvert par av riddere som sitter ved siden av hverandre. Noen av lysene (muligens alle, men også muligens ingen) er tent. For $i \in \{0,1,2\}$, la m_i være antall riddere satt ved siden av nøyaktig i tente lys.

Finn den minste mulige verdien av $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$ uttrykt ved n.

Oppgave 2 Betrakt følgende sett av to likninger:

$$\begin{cases} x^2 = y + 1, \\ xy = x + y. \end{cases}$$

Vis at dersom $(x, y) = (x_0, y_0)$ er en løsning av ovenforstående likningssett der x_0 og y_0 begge er reelle, så finnes det også en løsning $(x, y) = (x_1, y_1)$ der x_1 og y_1 også er reelle, slik at $y_1 x_0 = 1$.

Oppgave 3 La $ABCD$ være en konveks firkant slik at $BA = BC$. De (indre) vinkelhalveringslinjene til vinklene henholdsvis $\angle DBA$ og $\angle CBD$ skjærer midtnormalene til henholdsvis AD og CD i henholdsvis E og F.

Vis at omsirklene til $\triangle DAC$ og $\triangle DEF$ tangerer hverandre.

Bemerkning: En konveks firkant er en firkant der alle vinkler er mindre enn 180°.

Oppgave 4 Et par av positive heltall (a, b) er *godt* dersom alle brøkene

$$\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \cdots, \frac{a+9}{b+9}$$

er heltallige.

a) Vis at det finnes kun endelig mange gode par (a, b) med $b < a < b^9$.

b) Vis at det finnes uendelig mange gode par (a, b) med $b < a < b^{10}$.