40. Norræna Stærðfræðikeppnin

27. Mars 2026

Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.
Einungis skriffæri og teikniáhöld eru leyfð.

Dæmi 1 Látum $n \geq 3$ vera heiltölu. Það sitja n riddarar umhverfis hringborð. Á borðinu eru n kerti, þannig að á milli sérhverra tveggja aðliggjandi riddara er eitt kerti. Kveikt er á sumum (hugsanlega öllum og hugsanlega engu) kertunum. Fyrir $i \in \{0,1,2\}$, látum við m_i vera fjölda riddara sem sitja við hliðina á nákvæmlega i kertum sem kveikt er á.

Finnið minnsta mögulega gildi $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$ sem fall af n.

Dæmi 2 Lítið á jöfnuhneppið:

$$\begin{cases} x^2 = y + 1, \\ xy = x + y. \end{cases}$$

Sýnið að ef $(x, y) = (x_0, y_0)$, þar sem x_0 og y_0 eru rauntölur, er lausn á jöfnuhneppinu hér að ofan, þá er einnig til lausn $(x, y) = (x_1, y_1)$, þar sem x_1 og y_1 eru rauntölur og $y_1 x_0 = 1$.

Dæmi 3 Látum $ABCD$ vera úthyrndan ferhyrning þannig að $BA = BC$. Innri helmingalínur $\angle DBA$ og $\angle CBD$ skera miðþverla AD og CD í E og F, í þeirri röð.

Sannið að umhringir $\triangle DAC$ og $\triangle DEF$ snertist.

Athugið: Úthyrndur ferhyrningur er ferhyrningur þar sem öll horn eru minni en $180°$.

Athugið: Innri helmingalína horns er línan sem skiptir horninu í tvo jafna hluta.

Dæmi 4 Par jákvæðra heiltalna (a, b) er sagt vera *gott* ef öll brotin

$$\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \dots, \frac{a+9}{b+9}$$

eru heiltölur.

a) Sannið að einungis séu til endanlega mörg góð pör (a, b) með $b < a < b^9$.

b) Sannið að til séu óendanlega mörg góð pör (a, b) með $b < a < b^{10}$.