Version: suomi

40. pohjoismainen matematiikkakilpailu

27. maaliskuuta 2026

Kilpailu kestää 4 tuntia. Kukin tehtävä on 7 pisteen arvoinen.
Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.

1. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Pyöreän pöydän ympärillä istuu n ritaria. Pöydällä on n kynttilää, yksi kunkin vierekkäin istuvan ritariparin välissä. Jotkin kynttilät (mahdollisesi kaikki, mutta myös mahdollisesti eivät mitkään) ovat sytytettyinä. Kun $i \in \{0, 1, 2\}$, merkitään m_i:llä niiden ritarien lukumäärää, joiden vieressä on tasan i sytytettyä kynttilää.

Etsi luvun $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$ pienin mahdollinen arvo luvun n avulla ilmaistuna.

2. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöparia:

$$\begin{cases} x^2 = y + 1, \\ xy = x + y. \end{cases}$$

Osoita, että jos $(x, y) = (x_0, y_0)$ on tämän yhtälöparin ratkaisu, missä x_0 ja y_0 ovat reaalilukuja, niin yhtälöparilla on myös ratkaisu $(x, y) = (x_1, y_1)$, missä x_1 ja y_1 ovat reaalilukuja ja $y_1 x_0 = 1$.

3. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jolle $|BA| = |BC|$. Kulmien $\measuredangle DBA$ ja $\measuredangle CBD$ (sisäiset) kulmanpuolittajat leikkaavat sivujen AD ja CD keskinormaaleja vastaavasti pisteissä E ja F.

Todista, että kolmioiden $\triangle DAC$ ja $\triangle DEF$ ympärysympyrät sivuavat toisiaan.

Huomautus: Kupera nelikulmio on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat pienempiä kuin $180°$.

Huomautus: Kulman (sisäinen) kulmanpuolittaja on puolisuora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan.

4. Positiivisten kokonaislukujen pari (a, b) on *hyvä*, jos kaikki osamäärät

$$\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \dots, \frac{a+9}{b+9}$$

ovat kokonaislukuja.

a) Todista. että on olemassa vain äärellisen monta hyvää paria (a, b), joille $b < a < b^9$.

b) Todista, että on olemassa äärettömän monta hyvää paria (a, b), joille $b < a < b^{10}$.