40. Nordiske Matematikkonkurrence

27. marts 2026

Dansk version

Varighed 4 timer. Hver opgave giver 7 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

Opgave 1 Lad $n \geq 3$ være et helt tal. Der sidder n riddere omkring et rundt bord. På bordet er der n stearinlys sådan at der mellem hvert par af riddere der sidder ved siden af hinanden, er netop ét stearinlys. Nogle (muligvis alle, muligvis ingen) af stearinlysene er tændt. Lad m_i være antallet af riddere som sidder ved siden af netop i tændte stearinlys, for $i \in \{0, 1, 2\}$.

Bestem den mindst mulige værdi af $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$ udtrykt ved n.

Opgave 2 Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} x^2 = y + 1, \\ xy = x + y. \end{cases}$$

Vis at hvis $(x, y) = (x_0, y_0)$ hvor x_0 og y_0 er reelle tal, er en løsning til ligningssystemet, da findes også en løsning $(x, y) = (x_1, y_1)$ hvor x_1 og y_1 er reelle tal og $y_1 x_0 = 1$.

Opgave 3 Lad $ABCD$ være en konveks firkant hvor $|BA| = |BC|$. De indre vinkelhalveringslinjer til $\angle DBA$ og $\angle CBD$ skærer midtnormalerne til AD og CD i henholdsvis E og F.

Vis at de omskrevne cirkler til $\triangle DAC$ og $\triangle DEF$ tangerer hinanden.

Bemærkning: En konveks firkant er en firkant hvor alle vinkler er mindre end $180°$.

Bemærkning: Den indre vinklehalveringslinje til en vinkel er det linjestykke der deler vinklen i to lige store vinkler.

Opgave 4 Et par af hele tal (a, b) kaldes *godt* hvis brøkerne

$$\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \ldots, \frac{a+9}{b+9}$$

alle er hele tal.

a) Vis at der kun er endeligt mange gode par (a, b) hvor $b < a < b^9$.

b) Vis at der er uendeligt mange gode par (a, b) hvor $b < a < b^{10}$.