

Den 38e Nordiska matematiktävlingen

Tisdagen, den 9 april 2024

Svensk version

Uppgift 1 Låt $T(a)$ vara siffersumman av talet a . För vilka positiva heltal R finns det ett positivt heltal n sådant att $\frac{T(n^2)}{T(n)} = R$?

Uppgift 2 Låt Q_1 vara en fyrhörning sådan att sidornas mittpunkter ligger på en cirkel. Visa att det finns en inskriven fyrhörning Q_2 med samma sidlängder som Q_1 , sådan att två av vinklarna i Q_2 är lika.

Uppgift 3 Finn alla funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att

$$f(f(x)f(y) + y) = f(x)y + f(y - x + 1)$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

Uppgift 4 Alice och Bob spelar ett spel. Först väljer Alice en uppdelning \mathcal{C} av de positiva heltalen i en (inte nödvändigtvis ändlig) mängd av mängder, sådana att varje positivt heltal tillhör exakt en av mängderna i \mathcal{C} . Sedan utför Bob följande operation ändligt många gånger.

Välj en mängd $S \in \mathcal{C}$ som inte blivit vald tidigare, och låt D vara mängden av alla positiva heltal som delar åtminstone ett element i S . Lägg sedan till mängden $D \setminus S$ (som kan vara tomma mängden) till \mathcal{C} .

Bob vinner om det finns två lika mängder i \mathcal{C} efter ändligt många drag, i annat fall vinner Alice. Avgör vem av spelarna som har en vinnande strategi.

Skriptid 4 timmar.

Varje problem är värt 7 poäng.

Endast skriv- och ritdon är tillåtna.