Norwegian version

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1
La $T(a)$ betegne tverrsummen av (altså summen av sifrene i) a. For hvilke positive heltall R finnes det et positivt heltall n slik at $\frac{T(n^2)}{T(n)} = R$?

Oppgave 2
La $\mathcal{Q}_1$ være en firkant slik at midtpunktene på dens sider ligger på én sirkel. Vis at det finnes en syklisk firkant $\mathcal{Q}_2$ med de samme sidelengdene som $\mathcal{Q}_1$, slik at to av vinklene i $\mathcal{Q}_2$ er like.

Oppgave 3
Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$f(f(x)f(y) + y) = f(x)y + f(y - x + 1)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oppgave 4
Alice og Bob spiller et spill. Først velger Alice en partisjon $\mathcal{C}$ av de positive heltallene i en (ikke nødvendigvis endelig) mendge av mengder, slik at ethvert positivt heltall er i nøyaktig én av mengdene i $\mathcal{C}$. Deretter utfører Bob følgende steg et endelig antall ganger.

Velg én mengde $S \in \mathcal{C}$ som ikke er blitt valgt tidligere, og la D betegne mengden av positive heltall som deler minst ett tall i S. Legg så (den muligens tomme) mengden $D \setminus S$ til $\mathcal{C}$.

Bob vinner dersom et av stegene fører til en mengde $D \setminus S$ som allerede finnes i $\mathcal{C}$, ellers vinner Alice. Bestem hvilken av spillerne som har en vinnende strategi.

Merk: $D \setminus S$ betegner mendgen av elementer i D som ikke er i S.