

Icelandic version

Tímamörk eru 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.
Leyfileg hjálpartól eru ritfæri, hringfari og reglustika.

Dæmi 1

Fyrir tölu a látum $T(a)$ vera summu tölustafa hennar. Fyrir hvaða jákvæðu heiltölur R má finna jákvæða heiltölu n þannig að $\frac{T(n^2)}{T(n)} = R$?

Dæmi 2

Látum Q_1 vera ferhyrning þannig að miðpunktur hliða hans liggja allir á sama hring. Sannið að til sé rásaður ferhyrningur Q_2 með tvö jafnstór horn og hefur auk þess sömu hliðarlengdir og Q_1 .

Dæmi 3

Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ þannig að

$$f(f(x)f(y) + y) = f(x)y + f(y - x + 1)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$.

Dæmi 4

Alísa og Bogi spila leik. Í upphafi velur Alísa (ekki nauðsynlega endanlegt) safn mengja \mathcal{C} sem myndar skiptingu á jákvæðu heiltölunum. Það þýðir að sérhver jákvæð heiltala er í nákvæmlega einu af mengjunum. Eftir þetta framkvæmir Bogi eftirfarandi aðgerð endanlega mörgum sinnum.

Hann velur mengi S í safninu \mathcal{C} sem hann hefur ekki áður valið. Næst finnur hann allar jákvæðar heiltölur sem ganga upp í einhverja tölu S og setur saman í mengi D . Því næst bætir hann menginu $D \setminus S$ (hugsanlega tóma menginu) við safnið \mathcal{C} .

Bogi sigrar ef einhver tvö mengi í \mathcal{C} eru jöfn þegar hann hefur lokið við allar aðgerðir sínar, annars sigrar Alísa. Ákveðið hvor leikmannanna hefur örugga vinningsleið.

Athugið: $D \setminus S$ táknar mengi allra staka sem eru í menginu D en ekki í menginu S .