38. Nordiske Matematikkonkurrence

Tirsdag d. 9. april

Dansk version

Varighed 4 timer. Hver opgave giver 7 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

Opgave 1
Lad $T(a)$ være summen af cifrene i a. For hvilke positive hele tal R findes der et positivt helt tal n så $\frac{T(n^2)}{T(n)} = R$?

Opgave 2
Lad $\mathcal{Q}_1$ være en firkant med den egenskab at de fire midtpunkter af firkantens sider ligger på en cirkel. Vis at der findes en indskrivelig firkant $\mathcal{Q}_2$ med de samme sidelængder som $\mathcal{Q}_1$, sådan at to af vinklerne i $\mathcal{Q}_2$ er ens.

Opgave 3
Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(f(x)f(y) + y) = f(x)y + f(y - x + 1)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4
Alice og Bob spiller et spil. Først vælger Alice en partition $\mathcal{C}$ af de positive hele tal, dvs. en (ikke nødvendigvis endelig) mængde af delmængder af de positive hele tal så hvert positive hele tal er i netop en af mængderne i $\mathcal{C}$. Derefter udfører Bob følgende operation et endeligt antal gange:

Vælg en mængde $S \in \mathcal{C}$ som ikke tidligere er valgt, og lad D være mængden af samtlige positive hele tal som går op i mindst et element i S. Tilføj derefter mængden $D \setminus S$ (kan være den tomme mængde) til $\mathcal{C}$.

Bob vinder hvis der for mindst en af operationerne gælder at $D \setminus S$ allerede er i $\mathcal{C}$, og ellers vinder Alice. Afgør hvilken af de to spillere der har en vindende strategi.

Bemærkning: Mængden $A \setminus B$ er mængden af alle elementer i A som ikke er i B.