

Den 37. nordiske matematikkonkurransen

Torsdag, 30. mars 2023

Norwegian version

*Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.*

Problem 1 Alice og Bianca har hundre steiner. I starten av spillet fordeles disse hundre steinene på to hauger. Deretter består ett trekk i å velge en haug, så velge et positivt heltall som ikke er større enn halvparten av antall steiner i den haugen, og til slutt ta bort dette antall steiner fra den valgte haugen. Den første spilleren som ikke kan ta noen steiner taper. Alice gjør første trekk i spillet. Bestem alle startstørrelser for haugene for hvilke Bianca har en vinnende strategi.

Problem 2 La \mathbb{N}_+ betegne mengden av positive heltall. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ slik at

$$\gcd(f(x), y)f(xy) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{N}_+$.

Problem 3 Finn alle følger av heltall a_0, a_1, a_2, \dots slik at

$$a_k - a_\ell \mid k^2 - \ell^2$$

for alle heltall $k, \ell \geq 0$, det vil si at for ethvert valg av heltall $k, \ell \geq 0$, så finnes det et heltall z slik at $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$.

Problem 4 La ABC være en trekant, og M midtpunktet på siden BC . La E henholdsvis F være punkter på sidene AC henholdsvis AB slik at $ME = MF$. La D være det andre skjæringspunktet mellom omsirkelen til MEF og siden BC . Betrakt linjene ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F gjennom henholdsvis D, E og F , slik at $\ell_D \perp BC, \ell_E \perp CA$ og $\ell_F \perp AB$. Vis at linjene ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F møtes i ett punkt.