

## 37. Norræna Stærðfræðikeppnin

Fimmtudagurinn 30. mars 2023

Icelandic version

*Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.  
Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og teikniáhöld.*

**Problem 1** Alísa og Bína hafa eitthundrað glerkúlur. Í upphafi leiks skipta þær þessum hundrað kúlum í tvær hrúgur. Þar á eftir hefst leikurinn. Leikmaður sem á leik velur aðra af hrúgunum og fjarlægir svo úr henni jákvæðan heiltölufjölda kúlna úr þeirri hrúgu, en þó ekki fleiri en helming kúlanna í þeirri hrúgu. Fyrsti leikmaðurinn sem ekki getur fjarlægt neinar kúlur tapar leiknum. Leikmennirnir skiptast á að leika og Alísa leikur fyrsta leikinn. Finnið allar upphafstærðir á hrúgunum þannig að Bína hafi örugga vinningsleið.

**Problem 2** Látum  $\mathbb{N}_+$  tákna mengi jákvæðra heiltalna. Finnið öll föll  $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  þannig að

$$\gcd(f(x), y)f(xy) = f(x)f(y)$$

fyrir öll  $x, y \in \mathbb{N}_+$ . (Ef  $a$  og  $b$  eru heiltölur þá stendur  $\gcd(a, b)$  fyrir stærsta samdeili þeirra).

**Problem 3** Finnið allar heiltölur  $a_0, a_1, a_2, \dots$  þannig að fyrir allar heiltölur  $k, \ell \geq 0$  gildi

$$a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2,$$

það er að fyrir allar heiltölur  $k, \ell \geq 0$ , sé til heiltala  $z$  þannig að  $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$ .

**Problem 4** Látum  $ABC$  vera þríhyrning og  $M$  vera miðpunkt hliðarinnar  $BC$ . Látum  $E$  og  $F$  vera punktana á hliðunum  $AC$  og  $AB$ , í þessari röð, þannig að  $ME = MF$ . Látum  $D$  vera hinn skurðpunkt umhrings þríhyrningsins  $MEF$  við hliðina  $BC$ . Látum  $\ell_D, \ell_E$  og  $\ell_F$  vera línurnar um  $D, E$  og  $F$ , í þessari röð, þannig að  $\ell_D \perp BC$ ,  $\ell_E \perp CA$  og  $\ell_F \perp AB$ . Sýnið að  $\ell_D, \ell_E$  og  $\ell_F$  liggja allar um sama punkt.