

37. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag d. 30. marts 2023

Dansk version

*Varighed 4 timer. Hver opgave giver 7 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.*

Opgave 1 Alice og Bianca har 100 marmorkugler. I starten af spillet fordeler de de 100 marmorkugler i to bunker. Derefter består et træk i at vælge en bunke, vælge et positivt helt tal der ikke er større end halvdelen af antallet af marmorkugler i bunken, og derefter fjerne dette antal kugler fra bunken. Den første spiller der ikke kan fjerne nogen marmorkugler, har tabt. Alice trækker først. Bestem alle startstørrelser af de to bunker så Bianca har en vindende strategi.

Opgave 2 Lad \mathbb{N}_+ betegne mængden af positive hele tal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ så

$$\gcd(f(x), y)f(xy) = f(x)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{N}_+$.

Opgave 3 Bestem alle følger af hele tal a_0, a_1, a_2, \dots så der for alle hele tal $k, \ell \geq 0$ gælder at

$$a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2,$$

dvs. at der for alle hele tal $k, \ell \geq 0$ eksisterer et helt tal z så $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$.

Opgave 4 Lad ABC være en trekant, og lad M være midtpunktet af siden BC . Lad E og F være punkter på henholdsvis siden AC og siden AB så $|ME| = |MF|$. Lad D være det andet skæringspunkt mellem den omskrevne cirkel til trekant MEF og siden BC . Betragt linjerne ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F gennem henholdsvis D, E og F , så $\ell_D \perp BC$, $\ell_E \perp CA$ og $\ell_F \perp AB$. Vis at ℓ_D, ℓ_E og ℓ_F skærer hinanden i samme punkt.