

# Den 36e Nordiska matematiktävlingen

Måndagen, den 4 april 2022

## Uppgift 1

Finn alla funktioner  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sådana att

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x) \quad \text{och} \quad f(f(x)) = 1 - f(x),$$

för alla reella  $x$ .

## Uppgift 2

Städerna i Wonderland är sammanbundna av vägar. Varje gång det finns en direkt väg mellan två städer finns det även ett sätt att resa mellan städerna utan att använda den vägen. (För varje par städer finns det högst en direkt väg mellan dem.) Drottningen av Wonderland beordrar sina undersåtar att ta fram en lista över alla ”jämna” subsystem av vägsystemet, det vill säga alla system som bildas av delmängder av mängden vägar, sådana att varje stad är kopplad till ett jämnt antal vägar (eventuellt inga alls). För varje sådant subsystem ska man göra en lista över alla vägar. Om det totala antalet vägar i Wonderland är  $n$  och det totala antalet subsystem på listan är  $x$ , hur många vägar finns på listan, där varje väg räknas så många gånger som den förekommer?

## Uppgift 3

Anton och Britta spelar ett spel med mängden  $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ , där  $n \geq 5$  är ett udda heltal. Vid varje drag tar Anton ett tal från  $M$  och lägger det i sin mängd  $A$ , och Britta tar ett tal från  $M$  och lägger det i sin mängd  $B$  (både  $A$  och  $B$  är tomma vid spelets början). När  $M$  är tomt väljer Anton två olika tal  $x_1, x_2$  från  $A$  och visar dem för Britta. Britta väljer sedan två olika tal  $y_1, y_2$  från  $B$ . Britta vinner om

$$(x_1 x_2 (x_1 - y_1)(x_2 - y_2))^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n},$$

annars vinner Anton. Finn alla  $n$  för vilka Britta har en vinnande strategi.

## Uppgift 4

Låt  $ABC$  vara en spetsvinklig triangel med omskriven cirkel  $k$  och medelpunkt till den omskrivna cirkeln  $O$ . En rät linje genom  $O$  skär sidorna  $AB$  och  $AC$  i  $D$  respektive  $E$ . Beteckna med  $B'$  och  $C'$  spegelbilderna av  $B$  respektive  $C$  i punkten  $O$ . Visa att de omskrivna cirklarna till  $ODC'$  och  $OEB'$  skär varandra på  $k$ .

*Skrivtid 4 timmar.*

*Varje problem är värt 7 poäng.*

*Endast skriv- och ritdon är tillåtna.*