

Den 33e Nordiska matematiktävlingen

Måndagen den 1 april 2019

Svensk version

*Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 7 poäng.
Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.*

Problem 1 En mängd positiva heltal kallas *meningsfull* om för varje icke-tom ändlig delmängd både det motsvarande aritmetiska och det motsvarande geometriska medelvärdet är heltal.

- Finns det en meningsfull mängd som består av 2019 tal?
- Finns det en oändlig meningsfull mängd?

Anmärkning: Det geometriska medelvärdet av de icke-negativa talen a_1, a_2, \dots, a_n definieras som $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Problem 2 Låt a, b, c , där $c > a, b$, vara sidlängderna i en rätvinklig triangel. Visa att

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Problem 3 Fyrhörningen $ABCD$ satisfierar $\angle ACD = 2\angle CAB$, $\angle ACB = 2\angle CAD$ och $CB = CD$. Visa att $\angle CAB = \angle CAD$.

Problem 4 Låt n vara ett heltal sådant att $n \geq 3$, och antag att $2n$ hörn i en regelbunden $(4n + 1)$ -hörning är färgade. Visa att det finns tre färgade hörn som bildar en likbent triangel.