

Den 33. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 1. april 2019

Norsk versjon (bokmål)

Tid til disposisjon: 4 timer. Hver oppgave er verdt 7 poeng.

Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1 En mengde av forskjellige positive heltall kalles *meningsfull* hvis både det aritmetiske og det geometriske snittet til elementene i enhver ikke-tom delmengde er et heltall.

- a) Finnes det en meningsfull mengde bestående av 2019 tall?
- b) Finnes det en uendelig meningsfull mengde?

Merknad: Det geometriske snittet til tallene a_1, a_2, \dots, a_n er definert som $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

Oppgave 2 La a, b, c være sidelengdene i en rettvinklet trekant med $c > a, b$.

Vis at

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Oppgave 3 Firkanten $ABCD$ tilfedsstiller $\angle ACD = 2\angle CAB$, $\angle ACB = 2\angle CAD$ og $CB = CD$.

Vis at $\angle CAB = \angle CAD$.

Oppgave 4 La n være et heltall med $n \geq 3$, og anta at $2n$ av hjørnene i en regulær $(4n + 1)$ -kant er farget. Vis at det må finnes tre fargede hjørner som danner en likebent trekant.