

33. Norræna stærðfræðikeppnin

Mánudaginn 1. apríl 2019

Icelandic version

*Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.
Leyfuleg hjálpargögn eru skrifæri og teikniáhöld.*

Dæmi 1 Mengi ólíkra jákvæðra heiltalna er sagt vera *meðalfellt* ef fyrir sérhvert endanlegt ekki tómt hlutmengi gildir að venjulega og rúmfræðilega meðaltal stakanna í hlutmenginu eru bæði heiltölur.

- a) Er til meðalfellt mengi sem í eru nákvæmlega 2019 tölur?
- b) Er til óendanlegt meðalfellt mengi?

Athugið: Rúmfræðilegt meðaltal ekki neikvæðra talna a_1, a_2, \dots, a_n er skilgreint sem $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

Dæmi 2 Látum a, b, c vera hliðarlengdir rétthyrnds þríhyrnings með $c > a, b$.

Sýnið að

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Dæmi 3 Um ferhyrninginn $ABCD$ gildir að $\angle ACD = 2\angle CAB$, $\angle ACB = 2\angle CAD$ og $CB = CD$.

Sýnið að $\angle CAB = \angle CAD$.

Dæmi 4 Látum n vera heiltölu þannig að $n \geq 3$. Gerum ráð fyrir að $2n$ hornpunktar reglulegs $(4n+1)$ -hyrnings séu litaðir. Sýnið að til eru þrír litaðir hornpunktar sem mynda jafnarma þríhyrning.