

33. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag, d. 1. april, 2019

Danish version

*Time: 4 timer. Hver opgave kan give 7 point.
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.*

Opgave 1 En mængde A af forskellige positive heltal kaldes *meningsfuld*, hvis der for enhver endelig ikke-tom delmængde $B \subseteq A$ gælder, at det aritmetiske og geometriske gennemsnit af B begge er heltal.

- a) Findes der en meningsfuld mængde som består af 2019 tal?
- b) Findes der en uendelig meningsfuld mængde?

Bemærkning: For ikke-negative tal a_1, a_2, \dots, a_n er det geometriske gennemsnit defineret som $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, mens det aritmetiske gennemsnit er defineret som $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.

Opgave 2 Lad a, b, c være sidelængderne i en retvinklet trekant med $c > a, b$.

Vis at

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Opgave 3 Firkanten $ABCD$ opfylder $\angle ACD = 2\angle CAB$, $\angle ACB = 2\angle CAD$ og $|CB| = |CD|$.

Vis at $\angle CAB = \angle CAD$.

Opgave 4 Lad n være et heltal med $n \geq 3$ og antag at $2n$ hjørner i en regulær $(4n + 1)$ -kant er farvede. Vis at der findes tre farvede hjørner der danner en ligebenet trekant.