

32. Norræna Stærðfræðikeppnin

Mánudagur, 9. Apríl, 2018

Icelandic version

*Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.
Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og teikniáhöld.*

Dæmi 1 Látum k vera jákvæða heiltölu og P vera punkt í sléttunni. Við viljum teikna línur, sem liggja ekki í gegnum P , þannig að sérhver hálfína út frá P skeri að minnsta kosti k af línunum. Ákvarðið minnsta fjölda af línunum sem þarf.

Dæmi 2 Runa af framtölum p_1, p_2, \dots er mynduð úr tvemur framtölum p_1 og p_2 , síðan er p_{n+2} stærsti frumþátturinn í $p_n + p_{n+1} + 2018$ fyrir öll $n \geq 1$. Sannið að runan innihaldi aðeins endanlega margar ólíkar framtölur fyrir öll möguleg gildi á p_1 og p_2 .

Dæmi 3 Látum ABC vera þríhyrning með $|AB| < |AC|$. Látum D og E vera á línunum CA og BA í þríhyrningnum ABC þannig að $|CD| = |AB|$, $|BE| = |AC|$ og A, D og E liggja sömum megin við BC . Látum I vera miðju innritaðs hrings þríhyrningsins ABC og látum H vera hæðamiðju þríhyrningsins BCI . Sýnið að D, E og H liggja á sömu línu.

Dæmi 4 Látum $f = f(x, y, z)$ vera margliðu í þremur breytum x, y, z þannig að

$$f(w, w, w) = 0$$

fyrir öll $w \in \mathbb{R}$. Sýnið að til séu þrjár margliður A, B, C í sömu þremur breytum þannig að $A + B + C = 0$ og

$$f(x, y, z) = A(x, y, z) \cdot (x - y) + B(x, y, z) \cdot (y - z) + C(x, y, z) \cdot (z - x).$$

Er til margliða f þannig að margliðurnar A, B, C séu ótvírætt ákvarðaðar?