

32. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag d. 9. april 2018

Danish version

*Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 7 point.
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.*

Opgave 1 Lad k være et positivt helt tal og P et punkt i planen. Vi ønsker at tegne nogle linjer som ikke går gennem P , sådan at enhver halvlinje som starter i P , skærer mindst k af disse linjer. Bestem det mindste antal linjer så dette er muligt.

Opgave 2 En følge af primtal p_1, p_2, \dots er givet ved to startprimtal p_1 og p_2 , og ved at p_{n+2} er den største primdivisor i $p_n + p_{n+1} + 2018$ for alle $n \geq 1$. Vis at følgen kun indeholder endeligt mange primtal ligegyldigt hvilke primtal p_1 og p_2 vi starter med.

Opgave 3 Lad ABC være en trekant hvor $|AB| < |AC|$. Lad D og E være punkter på henholdsvis linjen CA og linjen BA så $|CD| = |AB|$ og $|BE| = |AC|$, og så A , D og E ligger på samme side af BC . Lad I være centrum for den indskrevne cirkel til trekant ABC , og lad H være højdernes skæringspunkt i trekant BCI . Vis at punkterne D , E og H ligger på linje.

Opgave 4 Lad $f = f(x, y, z)$ være et polynomium i tre variable x, y, z så

$$f(w, w, w) = 0$$

for alle $w \in \mathbb{R}$. Vis at der findes tre polynomier A , B og C i de samme tre variable så $A + B + C = 0$ og

$$f(x, y, z) = A(x, y, z)(x - y) + B(x, y, z)(y - z) + C(x, y, z)(z - x).$$

Findes der et polynomium f for hvilket A , B og C er entydigt bestemt?