

Den 31. nordiske matematikkonkurransen

Måndag 3. april 2017

Norsk versjon (nynorsk)

*Oppgåvene skal løysast på 4 timar. Du får opptil 7 poeng på kvar oppgåve.
Skrive- og teiknereiskapar er einaste tillatne hjelpemiddel.*

Oppgåve 1 La n vere eit positivt heiltal. Vis at det finst positive heiltal a og b slik at

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1.$$

Oppgåve 2 La a, b, α, β vere reelle tal slik at $0 \leq a, b \leq 1$, og $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Vis at dersom

$$ab \cos(\alpha - \beta) \leq \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)},$$

så held også

$$a \cos \alpha + b \sin \beta \leq 1 + ab \sin(\beta - \alpha).$$

Oppgåve 3 La M og N vere midtpunkta på sidene AC respektive AB i den spissvinkla trekanten ABC , der $AB \neq AC$. La vidare ω_B vere sirkelen med sentrum i M som går gjennom B , og ω_C sirkelen med sentrum i N som går gjennom C . La punktet D vere slik at $ABCD$ er eit likebeint trapes der AD og BC er parallelle. Anta at ω_B og ω_C skjer kvarandre i to forskjellige punkt P og Q . Vis at D ligg på linja PQ .

Problem 4 Finn alle heiltal n og m , $n > m > 2$, som er slik at ein regulær n -kant kan skrivast inn i ein regulær m -kant med kvart hjørne i n -kanten på ei side av m -kanten.