

31. Norræna Stærðfræðikeppnin

Mánudagur, 3. Apríl, 2017

Icelandic version

*Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.
Leyfileg hjálpargögn eru skrifffæri og teikniáhöld.*

Dæmi 1 Látum n vera jákvæða heiltölu. Sýnið að til séu jákvæðar heiltölur a og b þannig að:

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1.$$

Dæmi 2 Látum a, b, α, β vera rauntölur þannig að $0 \leq a, b \leq 1$ og $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Sýnið að ef

$$ab \cos(\alpha - \beta) \leq \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)},$$

þá sé

$$a \cos \alpha + b \sin \beta \leq 1 + ab \sin(\beta - \alpha).$$

Dæmi 3 Látum M og N vera miðpunkta hliðanna AC og AB í hvasshyrndum þríhyrningi ABC með $|AB| \neq |AC|$. Látum ω_B vera hringinn með miðju í M sem fer í gegnum B og látum ω_C vera hringinn með miðju í N sem fer í gegnum C . Látum punktinn D vera þannig að $ABCD$ sé jafnarma trapisa með AD samsíða BC . Gerum ráð fyrir að ω_B og ω_C skerist í tveimur ólíkum punktum P og Q . Sýnið að D liggur á línunni PQ .

Dæmi 4 Finnið allar heiltölur n og m með $n > m > 2$ og þannig að unnt sé að innrita reglulegan n -hyrning í reglulegan m -hyrning þannig að allir hornpunktar n -hyrningsins liggi á hliðum m -hyrningsins.