

# 31. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag d. 3. april 2017

Danish version

*Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 7 point.  
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.*

**Opgave 1** Lad  $n$  være et positivt helt tal. Vis at der findes positive hele tal  $a$  og  $b$  så:

$$\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1.$$

**Opgave 2** Lad  $a, b, \alpha, \beta$  være reelle tal, hvor  $0 \leq a, b \leq 1$  og  $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Vis at hvis

$$ab \cos(\alpha - \beta) \leq \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)},$$

da gælder

$$a \cos \alpha + b \sin \beta \leq 1 + ab \sin(\beta - \alpha).$$

**Opgave 3** Lad  $M$  og  $N$  være midtpunkterne af henholdsvis siden  $AC$  og siden  $AB$  i en spidsvinklet trekant  $ABC$ , hvor  $|AB| \neq |AC|$ . Lad  $\omega_B$  være cirklen som har centrum  $M$  og går gennem  $B$ , og lad  $\omega_C$  være cirklen som har centrum  $N$  og går gennem  $C$ . Lad punktet  $D$  være det punkt der opfylder at  $ABCD$  er et ligebenet trapez hvor  $AD$  er parallel med  $BC$ . Antag at  $\omega_B$  og  $\omega_C$  skærer hinanden i to forskellige punkter  $P$  og  $Q$ . Vis at punktet  $D$  ligger på linjen  $PQ$ .

**Opgave 4** Bestem alle hele tal  $n$  og  $m$ ,  $n > m > 2$ , så en regulær  $n$ -kant kan indskrives i en regulær  $m$ -kant så alle  $n$ -kantens hjørner ligger på  $m$ -kantens sider.