

# 30. norræna stærðfræðikeppnin

Þriðjudaginn, 5. apríl 2016

Íslensk útgáfa

*Leyfilegur tími er 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.  
Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.*

## Dæmi 1

Ákvarðið allar runur af ekki-neikvæðum heiltölum  $a_1, \dots, a_{2016}$  sem allar eru minni en eða jafnar 2016 og uppfylla  $i + j \mid ia_i + ja_j$  fyrir öll  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ .

## Dæmi 2

Látum  $ABCD$  vera rásaðan ferhyrning (þ.e. umritanlegan með hring) með  $AB = AD$  og  $AB + BC = CD$ .

Ákvarðið hornið  $\angle CDA$ .

## Dæmi 3

Finnið öll  $a \in \mathbb{R}$  þannig að til sé fall  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sem uppfyllir skilyrðin

- (i)  $f(f(x)) = f(x) + x$ , fyrir öll  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f(f(x) - x) = f(x) + ax$ , fyrir öll  $x \in \mathbb{R}$ .

## Dæmi 4

Í ríki Georgs konungs eru 1680 eyjar. Hann hefur ákveðið að tengja þær með brúm. Svo illa vill til að uppreisnarhópur hyggst eyðileggja tvær brúnna eftir að allar brýrnar hafa verið byggðar, en þó ekki tvær brýr frá sömu eyju.

Hver er minnsti fjöldi brúa sem konungurinn þarf að byggja til að tryggt sé að ferðast megi brúarleið milli sérhverra tveggja af eyjunum 1680 eftir að uppreisnarhópurinn hefur eyðilagt tvær brúnna?