

## 29. norræna stærðfræðikeppnin

Þriðjudaginn 24. mars 2015

Íslensk útgáfa

### Dæmi 1

Látum  $ABC$  vera þríhyrning og  $\Gamma$  hringinn með miðstreng  $AB$ . Helmingalínur hornanna  $\angle BAC$  og  $\angle ABC$  skera  $\Gamma$ , sú fyrri í  $D \neq A$  og sú seinni í  $E \neq B$ . Innritaði hringur  $ABC$  snertir  $BC$  í  $F$  og  $AC$  í  $G$ . Sannið að punktarnir  $D$ ,  $E$ ,  $F$  og  $G$  liggja allir á sömu línu.

### Dæmi 2

Finnið frumtölurnar  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ef gefið er að að önnur talnanna  $pqr$  og  $p + q + r$  er 101 sinnum hin.

### Dæmi 3

Látum  $n > 1$  og  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  vera margliðu með  $n$  rauntölu-rótum (taldar með endurtekningu). Skilgreinum margliðu  $q$  sem

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x + j).$$

Við vitum að  $p(2015) = 2015$ . Sannið að  $q$  hafi a.m.k. 1970 ólíkar rætur  $r_1, \dots, r_{1970}$  þannig að  $|r_j| < 2015$  fyrir öll  $j = 1, \dots, 1970$ .

### Dæmi 4

Alfræðiritröð samanstendur af 2000 tölusettum bindum. Bindunum er staffað í röð, með bindi númer 1 efst og bindi númer 2000 neðst. Framkvæma má tvenns konar aðgerðir á stafflanum:

- (i) Fyrir slétta tölu  $n$  má taka  $n$  efstu bækurnar og færa þær neðst í stafflann án þess að breyta röð þeirra.
- (ii) Fyrir oddatölu  $n$  má taka  $n$  efstu bækurnar, snúa röð þeirra við og setja þær aftur efst í stafflann.

Hversu margar ólíkar umraðanir á bókunum er hægt framkalla með því að endur-taka þessar tvær tegundir af aðgerðum í einhverri röð?

*Leyfilegur tími er 4 klukkustundir.*

*Hvert dæmi er 7 stiga virði.*

*Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.*