

29. Nordiske Matematikkonkurrence

Tirsdag d. 24. marts 2015

Dansk version

Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 7 point.

Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1.

Lad ABC være en trekant og Γ cirklen med diameter AB . Vinkelhalveringslinjerne til $\angle BAC$ og $\angle ABC$ skærer Γ i henholdsvis D og E (forskellige fra A og B). Den indskrevne cirkel til trekant ABC rører siderne BC og AC i henholdsvis F og G . Vis at punkterne D , E , F og G ligger på linje.

Opgave 2.

Bestem primtallene p , q og r når det oplyses at et af tallene pqr og $p + q + r$ er 101 gange det andet.

Opgave 3.

Lad $n > 1$ og $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ være et polynomium med n reelle rødder (regnet med multiplicitet). Lad polynomiet q være givet ved

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x+j).$$

Vi ved at $p(2015) = 2015$. Vis at q har mindst 1970 forskellige rødder $r_1, r_2, \dots, r_{1970}$ så $|r_j| < 2015$ for alle $j = 1, 2, \dots, 1970$.

Opgave 4.

En encyklopædi består af 2000 nummererede bind. Bindene ligger i en stabel i rækkefølge med nummer 1 øverst og nummer 2000 nederst. Det er tilladt at udføre følgende to operationer på stablen:

- (i) For lige n må man tage de n øverste bind og placere dem nederst i stablen uden at ændre deres rækkefølge.
- (ii) For ulige n må man tage de n øverste bind, lægge dem i omvendt rækkefølge og placere dem øverst på stablen igen.

Hvor mange forskellige permutationer af bindene kan man opnå ved at benytte de to operationer gentagne gange?