

Den 28. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 31. mars 2014

Norsk versjon (bokmål)

*Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.*

Oppgave 1

Finn alle funksjoner $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (der \mathbb{N} betegner mengden av naturlige tall, inkludert 0), slik at

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x+y)f(x-y),$$

for alle $x, y \in \mathbb{N}$ med $x \geq y$.

Oppgave 2

Gitt en likesidet trekant, finn alle punkter i trekantens indre slik at avstanden fra punktet til én av sidene er lik det geometriske snittet av avstandene fra punktet til de to andre sidene i trekanten.

[Det geometriske snittet av to tall x og y er \sqrt{xy} .]

Oppgave 3

Finn alle ikke-negative heltall a , b og c , slik at

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2014}.$$

Oppgave 4

Et spill spilles på et $n \times n$ sjakkbrett. Til å begynne med finnes det 99 brikker på hvert felt. To spillere A og B trekker vekselvis. Et trekk består i å velge én rad eller én kolonne, og ta en brikke fra hvert felt i den raden eller kolonnen. En rad eller kolonne kan kun velges dersom hvert felt i den inneholder minst én brikke. Første spiller som ikke kan ta sitt trekk taper. Spiller A begynner. Finn alle verdier av n for hvilke A har en vinnende strategi.