

28. norræna stærðfræðikeppnin

Mánudaginn 31. mars 2014

Íslensk útgáfa

*Leyfilegur tími er 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 5 stiga virði.
Einu leyfilegu hjálpartækin eru skrifffæri og teikniáhöld.*

Dæmi 1

Finnið öll föll $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (þar sem \mathbb{N} er mengi allra heiltalna ≥ 0), þannig að

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x + y)f(x - y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{N}$ með $x \geq y$.

Dæmi 2

Fyrir gefinn jafnhliða þríhyrning, finnið alla punkta inni í þríhyrningnum sem eru þannig að fjarlægð punktsins frá einni af hliðum þríhyrningsins sé jöfn rúmfræðilegu meðaltali fjarlægða hans frá hinum hliðunum tveimur.

[Rúmfræðilegt meðaltal tveggja talna x og y er skilgreint sem \sqrt{xy} .]

Dæmi 3

Finnið allar ekki neikvæðar heiltölur a, b, c , þannig að

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2014}$$

Dæmi 4

Leikur er spilaður á $n \times n$ skákborði. Í upphafi leiks eru 99 steinar á hverjum reit. Tveir leikmenn A og B leika til skiptis, þar sem þeir í hverjum leik velja annaðhvort eina línu eða einn dálk og fjarlægja einn stein af hverjum reit í línunni eða dálknum sem valinn var. Þeir mega aðeins velja línu eða dálk sem hefur minnst einn stein á hverjum reit. Sá leikmaður sem fyrr getur hvorki valið línu né dálk tapar leiknum. Leikmaður A byrjar. Fyrir hvaða gildi n á leikmaður A örugga vinningsleið?