

27. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag den 8. april 2013

Dansk version

Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 5 point. Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1

Lad $(a_n)_{n \geq 1}$ være en talfølge med $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

for alle $n \geq 1$, hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end eller lig med x . Bestem alle $n \leq 2013$ sådan at a_n er et kvadrattal.

Opgave 2

I en fodboldturnering er der n hold, med $n \geq 4$, og hvert par af hold mødes netop én gang. Antag at det ved turneringens slutning viser sig at holdenes pointtal er n på hinanden følgende hele tal.

Bestem det størst mulige pointtal for holdet med den laveste score, idet pointene tildeles efter de sædvanlige regler i fodbold (vinderen af en kamp får 3 point, taberen får 0 point og i tilfældet af en uafgjort kamp får begge hold 1 point).

Opgave 3

Definer en talfølge $(n_k)_{k \geq 0}$ ved at $n_0 = n_1 = 1$, og $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ og $n_{2k+1} = n_k$ for $k \geq 1$. Lad yderligere $q_k = n_k/n_{k-1}$ for alle $k \geq 1$.

Vis at alle positive rationale tal forekommer præcis én gang i følgen $(q_k)_{k \geq 1}$.

Opgave 4

Lad ABC være en spidsvinklet trekant og H et punkt i dets indre. Punktet H føres over i punkterne H_c og H_b ved spejling i henholdsvis siden AB og siden AC , og ved spejling i de samme sideres midtpunkter føres H over i henholdsvis H'_c og H'_b .

Vis at de fire punkter H_b , H'_b , H_c og H'_c ligger på en cirkel hvis og kun hvis mindst to af punkterne falder sammen, eller H ligger på højden fra A i trekant ABC .