

26. norræna stærðfræðikeppnin

Þriðjudaginn 27. mars 2012

Íslensk útgáfa

Leyfilegur tími er 4 kukkustundir. Hvert dæmi er 5 stiga virði. Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.

DÆMI 1. Rauntölurnar a, b, c uppfylla jöfnuna $a^2 + b^2 = 2c^2$ og einnig gildir að $a \neq b, c \neq -a$ og $c \neq -b$. Sýnið að

$$\frac{(a + b + 2c)(2a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b)(a + c)(b + c)}$$

sé heiltala.

DÆMI 2. Gefinn er þríhyrningur ABC . Látum punktinn P liggja á umrituðum hring þríhyrningsins og vera miðpunkt bogans BC sem ekki inniheldur A . Teiknum beina línu l í gegnum P samsíða AB . Táknum með k hringinn sem liggur í gegnum B og snertir línuna l í punktinum P . Látum Q vera hinn skurðpunkt k og línunnar AB (ef ekki er annar skurðpunktur, skal velja $Q = B$). Sannið að $AQ = AC$.

DÆMI 3. Finnið minnstu jákvæðu heiltöluna n , þannig að til séu n heiltölur x_1, x_2, \dots, x_n (ekki endilega ólíkar) með $1 \leq x_k \leq n$ fyrir $k = 1, 2, \dots, n$ og sem eru þannig að

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{og} \quad x_1 x_2 \dots x_n = n!$$

en $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \{1, 2, \dots, n\}$.

DÆMI 4. Talan 1 er skrifuð á töflu. Síðan er runa af tölum búin til á eftirfarandi hátt: Í hverju skrefi er sérhverri tölu a á töflunni skipt út fyrir tölurnar $a - 1$ og $a + 1$; ef talan 0 kemur fyrir er hún strax þurrkuð út; komi tala fyrir oftari en einu sinni eru öll eintökin skilin eftir á töflunni. Þannig að taflan sýnir 1 eftir 0 skref; 2 eftir 1 skref; 1, 3 eftir 2 skref; 2, 2, 4 eftir 3 skref, o.s.frv. Hversu margar tölur verða á töflunni eftir n skref?