

## 26. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Tiistai, 27. maaliskuuta 2012  
Suomenkielinen versio – Finnish version

*Työaika 4 tuntia. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 5. Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.*

**1. tehtävä.** Reaaliluvuille  $a, b, c$  pätee  $a^2 + b^2 = 2c^2$  ja  $a \neq b, c \neq -a, c \neq -b$ . Osoita, että

$$\frac{(a + b + 2c)(2a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b)(a + c)(b + c)}$$

on kokonaisluku.

**2. tehtävä.** Piste  $P$  on se kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän piste, joka puolittaa kaarista  $BC$  sen, jolla piste  $A$  ei ole. Piirretään  $P$ :n kautta  $AB$ :n suuntainen suora  $\ell$ . Olkoon  $k$  pisteen  $B$  kautta kulkeva ympyrä, joka sivuaa suoraa  $\ell$  pisteessä  $P$ . Olkoon  $Q$  ympyrän  $k$  ja suoran  $AB$  toinen leikkauspiste. (Ellei toista leikkauspistettä ole, niin  $Q = B$ .) Todista, että  $AQ = AC$ .

**3. tehtävä.** Määritä pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , jolle on olemassa  $n$  (ei välttämättä eri suurta) kokonaislukua  $x_1, x_2, \dots, x_n, 1 \leq x_k \leq n$ , kun  $1 \leq k \leq n$ , joille pätee

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 \dots x_n = n!,$$

mutta  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \{1, 2, \dots, n\}$ .

**4. tehtävä.** Taululle on kirjoitettu luku 1. Sen jälkeen taululle kirjoitetaan vaiheittain lisää lukuja seuraavasti: kussakin vaiheessa jokainen taululla oleva luku  $a$  korvataan luvuilla  $a - 1$  ja  $a + 1$ ; jos taululle ilmestyy luku 0, se pyyhitään pois. Jos jokin luku ilmestyy taululle useammin kuin kerran, kaikki esiintymät jätetään taululle. Siten vaiheessa 0 taululla on luku 1, vaiheessa 1 luku 2, vaiheessa 2 luvut 1 ja 3, vaiheessa 3 luvut 2, 2 ja 4 jne. Montako lukua taululla on vaiheessa  $n$ ?