

## 25. norræna stærðfræðikeppnin

Mánudaginn 4. apríl 2011

Íslensk útgáfa

Leyfilegur tími er 4 kukkustundir. Hvert dæmi er 5 stiga virði. Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.

### Dæmi 1

Ef  $a_0, a_1, \dots, a_{1000}$  tákna tölustafi, getur summa 1001-stafa talnanna  $a_0a_1 \dots a_{1000}$  og  $a_{1000}a_{999} \dots a_0$  haft tölustafi sem allir eru oddatölur?

### Dæmi 2

Gerum ráð fyrir að í þríhyrningi  $ABC$  sé  $AB = AC$ . Látum  $D$  vera punkt á línunni  $BA$  þannig að  $A$  liggi á milli  $B$  og  $D$  og látum  $E$  vera punkt á strikinu  $BC$ , þannig að línurnar  $CD$  og  $AE$  séu samsíða. Sannið að

$$CD \geq \frac{4h}{BC} CE,$$

þar sem  $h$  er hæðin frá  $A$  í þríhyrningnum  $ABC$ . Hvenær gildir jafnaðarmerkið?

### Dæmi 3

Finnið öll föll  $f$  þannig að

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

fyrir allar rauntölur  $x$  og  $y$ .

### Dæmi 4

Sýnið að fyrir sérhverja heiltölu  $n \geq 2$  gildi að summa brotanna  $\frac{1}{ab}$ , þar sem  $a$  og  $b$  eru ósambátta jákvæðar heiltölur þannig að  $a < b \leq n$  og  $a + b > n$ , sé jöfn  $\frac{1}{2}$ .

(Tvær heiltölur  $a$  og  $b$  eru sagðar vera ósambátta ef stærsti samdeilir  $a$  og  $b$  er 1.)