Den 24:e Nordiska Matematiktävlingen

Tisdagen den 13 april 2010
Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

En funktion $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, där $\mathbb{Z}_+$ är mängden av positiva heltal, är icke-avtagande och uppfyller $f(mn) = f(m)f(n)$ för alla relativt prima positiva heltal m och n. Visa att $f(8)f(13) \geq (f(10))^2$.
Anm. Två heltal sägs vara *relativt prima* om de saknar gemensam delare > 1.

Problem 2

Tre cirklar, Γ_A, Γ_B och Γ_C, skär alla varandra i punkten O. Utöver denna punkt skär Γ_A och Γ_B varandra i punkten C, Γ_A och Γ_C skär varandra i punkten B, medan Γ_B och Γ_C skär varandra i punkten A. Linjen AO skär cirkeln Γ_A i punkten $X \neq O$. Linjen BO skär cirkeln Γ_B i punkten $Y \neq O$, medan linjen CO skär cirkeln Γ_C i punkten $Z \neq O$. Visa att

$$\frac{|AY|\,|BZ|\,|CX|}{|AZ|\,|BX|\,|CY|} = 1.$$

Problem 3

Laura har 2010 lampor anslutna till 2010 knappar framför sig. Hon vill för varje sådan knapp veta vilken lampa den motsvarar. För att avgöra detta observerar hon vilka lampor som tänds när Rickard trycker ned ett urval av knapparna. Rickard trycker alltid ned knapparna samtidigt så att också lamporna tänds samtidigt.
a) Om Rickard väljer vilka knappar som ska tryckas ned, hur många olika kombinationer av knappar kan han maximalt trycka ned innan Laura med säkerhet kan identifiera knapparna med lamporna?
b) Under antagandet att Laura väljer vilka kombinationer av knappar som ska tryckas ned, vad är det minsta antalet försök som hon behöver göra för att identifiera knapparna med lamporna på ett korrekt sätt?

Problem 4

Ett positivt heltal sägs vara *enkelt* om dess gängse representation i tiotalssystemet består av idel nollor och ettor. Bestäm det minsta heltalet k för vilket varje positivt heltal n kan skrivas som $n = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_k$, där $a_1, \ldots, a_k$ är enkla positiva heltal.