

Den 24. nordiske matematikkonkurransen

13. april 2010

1. En funksjon $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, der \mathbb{Z}_+ er mengden av positive heltall, er voksende (dvs. at hvis $k < l$, så er $f(k) \leq f(l)$) og tilfredsstillende $f(mn) = f(m)f(n)$ for alle relativt primiske positive heltall m og n . Bevis at $f(8)f(13) \geq (f(10))^2$. (To positive heltall er relativt primisk hvis største felles divisor er én.)
2. Tre sirkler Γ_A , Γ_B og Γ_C har et felles skjæringspunkt O . Det andre skjæringspunktet mellom Γ_A og Γ_B er C , det andre skjæringspunktet mellom Γ_A og Γ_C er B , og det andre skjæringspunktet mellom Γ_C og Γ_B er A . Linja AO skjærer sirkelen Γ_A i punktet $X \neq O$. På samme måte skjærer linja BO sirkelen Γ_B i punktet $Y \neq O$, og linja CO skjærer sirkelen Γ_C i punktet $Z \neq O$. Vis at

$$\frac{|AY| |BZ| |CX|}{|AZ| |BX| |CY|} = 1.$$
3. Foran seg har Laura 2010 lamper som er koplet til 2010 knapper. Hun ønsker å finne ut hvilken lampe som er koplet til hver knapp. For å gjøre det, observerer hun hvilke lamper som lyser når Richard trykker på et utvalg av knappene. (Ikke å trykke på noen av knappene er også et mulig utvalg.) Richard trykker alltid på knappene samtidig, så lampene lyser samtidig også.
 - a) Anta at Richard velger hvilke knapper som skal trykkes på. Hva er største mulige antall kombinasjoner av knapper han kan trykke på før Laura kan finne ut hvilken lampe som er koplet til hver knapp?
 - b) Anta at Laura velger hvilke knapper som skal trykkes på. Hva er minste mulige antall kombinasjoner av forsøk hun må gjøre for at hun skal finne ut hvilken lampe som er koplet til hver knapp?
4. Et positivt heltall kalles *enkelt* hvis den vanlige representasjonen av tallet i titallsystemet består av bare nuller og ettall. Finn minste positive heltall k som er slik at hvert positive heltall n kan skrives som $n = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_k$, der a_1, \dots, a_k er enkle.

Oppgavene skal løses på 4 timer.

Du får opptil 5 poeng på hver oppgave.

Skrive- og tegnesaker er eneste tillatte hjelpemidler.