

Den 21:a Nordiska Matematiktävlingen

Torsdagen den 29 mars, 2007

Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skrivdon och linjal.

Problem 1

Bestäm *en* lösning i positiva heltal till ekvationen

$$x^2 - 2x - 2007y^2 = 0.$$

Problem 2

En triangel, en linje och tre rektanglar – varje rektangel med en sida parallell med den givna linjen – är givna på sådant sätt att rektanglarna täcker triangelns sidor fullständigt. Visa att rektanglarna då måste täcka triangelns inre fullständigt.

Problem 3

Talet 10^{2007} är skrivet på en svart tavla. Anne och Berit genomför ett spel där spelaren som står på tur utför en av följande två operationer:

- (i) ersätter ett tal x på tavlan med två heltal a och b , större än 1, så att $x = ab$;
- (ii) stryker ett eller båda av två lika tal på tavlan.

Den spelare som inte kan utföra sitt drag när hon står på tur förlorar spelet. Vem vinner spelet om Anne börjar och båda spelarna agerar på optimalt sätt?

Problem 4

En linje genom en punkt A skär en cirkel i två punkter B och C på sådant sätt att B ligger mellan A och C . Från punkten A dras de två tangenterna till cirkeln. De träffar cirkeln i punkterna S och T . Låt P vara skärningen mellan linjerna ST och AC . Visa att $AP/PC = 2 \cdot AB/BC$.