

21. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 29. marts 2007

Dansk version

Tid: 4 timer. Der gives 5 point for hver opgave.

Opgave 1. Bestem én positiv heltalsløsning til ligningen

$$x^2 - 2x - 2007y^2 = 0.$$

Opgave 2. En trekant, en linje og tre rektangler, med en side parallel med den givne linje, er givet på en sådan måde at rektanglerne fuldstændig dækker trekantens sider. Vis at rektanglerne nødvendigvis dækker hele den indre del af trekanten.

Opgave 3. Tallet 10^{2007} er skrevet på en tavle. Anne og Berit spiller et spil hvor spilleren efter tur foretager en af to operationer

- (i) erstatter et tal x på tavlen med to hele tal a og b større end 1 så $x = ab$;
- (ii) sletter den ene eller begge af to ens tal på tavlen.

Spilleren som ikke er i stand til at foretage sit træk, har tabt spillet.

Hvem vil vinde spillet hvis Anne begynder, og begge spillere spiller på en optimal måde?

Opgave 4. En linje gennem et punkt A skærer en cirkel i to punkter, B og C , på en sådan måde at B ligger mellem A og C . Fra punktet A tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne S og T . Lad P være skæringspunktet mellem linjerne ST og AC .

Vis at $\frac{|AP|}{|PC|} = 2 \cdot \frac{|AB|}{|BC|}$.

Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.