

Den 20. nordiske matematikkonkurransen

Torsdag 30. mars 2006

Norsk versjon

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave.

Oppgave 1. La B og C være punkter på to faste stråler som går ut fra et punkt A slik at $AB + AC$ er konstant. Vis at det fins et punkt $D \neq A$ som er slik at de omskrevne sirklene om trekantene ABC går gjennom D for alle valg av B og C .

Oppgave 2. De reelle tallene x , y and z er ikke alle like og tilfredsstill

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k.$$

Bestem alle mulige verdier av k .

Oppgave 3. En følge $\{a_n\}$ av positive heltall er gitt ved

$$a_0 = m \quad \text{og} \quad a_{n+1} = a_n^5 + 487 \quad \text{for alle} \quad n \geq 0.$$

Bestem alle verdier av m som gjør at følgen inneholder flest mulig kvadrattall.

Oppgave 4. Kvadratene på et 100×100 -sjakkbrett er malt med 100 forskjellige farger. Hvert kvadrat har bare én farge, og hver farge blir brukt nøyaktig 100 ganger. Vis at det fins en rad eller en kolonne på sjakkbrettet der minst 10 farger er brukt.

Bare skrive- og tegneredskaper er tillatte hjelpemidler.