

## 20. norræna stærðfræðikeppnin

Þriðjudaginn 30. mars 2006

Leyfilegur tími er 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 5 stiga virði.

**Dæmi 1.** Látum  $B$  og  $C$  vera punkta á tveimur hálfínnum sem liggja útfrá punkti  $A$ , þannig að  $AB + AC$  sé fasti.

Sannið að til sé punktur  $D \neq A$  þannig að umritaðir hringir þríhyrninganna  $ABC$  liggja gegnum  $D$  fyrir sérhvert val á  $B$  og  $C$ .

**Dæmi 2.** Rauntölurnar  $x$ ,  $y$  og  $z$  eru ekki allar jafnar og uppfylla

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k$$

Ákvarðið öll möguleg gildi á  $k$ .

**Dæmi 3.** Runa af jákvæðum heiltölum  $\{a_n\}$  er gefin með

$$a_0 = m \quad \text{og} \quad a_{n+1} = a_n^5 + 487 \quad \text{fyrir öll } n \geq 0$$

Ákvarðið öll gildi á  $m$  sem eru þannig að runan hafi eins margar ferningstölur og mögulegt er.

**Dæmi 4.** Reitir  $100 \times 100$  skákborðs eru málaðir með 100 mismunandi litum. Hver reitur fær aðeins einn lit og hver litur er notaður á nákvæmlega 100 reiti.

Sýnið að finna megi línu eða dálk á skákborðinu þar sem að minnsta kosti 10 litir eru notaðir.

*Einu leyfilegu hjálpartækin eru skriffæri og teikniáhöld.*