

## 17. Nordiske Matematikkonkurrence

*Torsdag den 3. april 2003*

*Dansk version*

**Opgave 1.** Vi placerer nogle sten på et rektangulært skakbræt som har 10 rækker og 14 søjler. Bagefter opdager vi at der er et ulige antal sten i hver række og hver søjle. Lad skakbrættets felter være farvet (som sædvanligt) skiftevis sorte og hvide. Bemærk at der kan ligge flere sten på samme felt. Vis at der er et lige antal sten på de sorte felter.

**Opgave 2.** Bestem alle tripler  $(x, y, z)$  af hele tal så

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003.$$

**Opgave 3.** Den ligesidede trekant  $\triangle ABC$  indeholder et punkt  $D$  så  $\angle ADC = 150^\circ$ .

Vis at en trekant med sidelængder  $|AD|$ ,  $|BD|$  og  $|CD|$  nødvendigvis er retvinklet.

**Opgave 4.** Lad  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  være mængden af reelle tal fraregnet nul. Bestem alle funktioner  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  som opfylder

$$f(x) + f(y) = f(xyf(x+y))$$

for alle  $x, y \in \mathbb{R}^*$  hvor  $x + y \neq 0$ .

Tid: 4 timer.

Der gives 5 point for hver opgave.

Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.