3. Nordiske Matematikkonkurrence

10. april 1989
Dansk version

Til opgavebesvarelsen gives 4 timer.
For hver opgave gives maksimalt 5 point.

Opgave 1

Bestem et polynomium P af mindst mulig grad med følgende fire egenskaber:
(a) P har heltallige koefficienter,
(b) P har kun heltallige nulpunkter,
(c) $P(0) = -1$, og
(d) $P(3) = 128$.

Opgave 2

Tre sideflader i et tetraeder har alle en ret vinkel ved det fælles hjørne. De tre sideflader har arealer A, B og C.
Beregn tetraedrets totale overfladeareal.

Opgave 3

Lad $\mathcal{S}$ være mængden af alle tal t fra $[-1; 1]$ således at talfølgen $x_0, x_1, x_2, ...$, der er defineret ved

$$x_0 = t \quad \text{og} \quad x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad ,$$

har egenskaben at der findes et naturligt tal N så $x_n = 1$ for alle $n \geq N$.
Vis at $\mathcal{S}$ har uendelig mange elementer.

Opgave 4

For hvilke positive hele tal n gælder følgende påstand?
" Hvis $a_1, a_2, ..., a_n$ er hele positive tal, og $a_k \leq n$ for alle k, og $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n$, så er det muligt at vælge en delfølge $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_j}$ $(i_1 < i_2 < ... < i_j)$, så $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_j} = n$. "