17. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 3. april 2003

Dansk version

Opgave 1. Vi placerer nogle sten på et rektangulært skakbræt som har 10 rækker og 14 søjler. Bagefter opdager vi at der er et ulige antal sten i hver række og hver søjle. Lad skakbrættets felter være farvet (som sædvanligt) skiftevis sorte og hvide. Bemærk at der kan ligge flere sten på samme felt. Vis at der er et lige antal sten på de sorte felter.

Opgave 2. Bestem alle tripler (x, y, z) af hele tal så

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003.$$

Opgave 3. Den ligesidede trekant $\triangle ABC$ indeholder et punkt D så $\angle ADC = 150°$.
Vis at en trekant med sidelængder $|AD|$, $|BD|$ og $|CD|$ nødvendigvis er retvinklet.

Opgave 4. Lad $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ være mængden af reelle tal fraregnet nul.
Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ som opfylder

$$f(x) + f(y) = f(xyf(x + y))$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^*$ hvor $x + y \neq 0$.

Tid: 4 timer.
Der gives 5 point for hver opgave.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.

Løsning 1. Vi nummererer rækkerne fra 1 til 10 og søjlerne fra 1 til 14. Vi kan antage at feltet $(1,1)$ er hvidt så feltet (i,j) er sort hvis og kun hvis $i+j$ er ulige. Det samlede antal sten i de ulige rækker er en sum af 5 ulige tal, altså et ulige tal. Ligeledes er det samlede antal sten i de ulige søjler et ulige tal. Summen af disse to tal er et lige tal og er også lig antallet af sten på de sorte felter plus to gange antallet af sten på de hvide felter (i,j) hvor både i og j er ulige tal. Derfor er antallet af sten på de sorte felter et lige tal.

Løsning 2. Ved faktorisering af venstresiden får vi $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = 2003$. Da $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz = \frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$, er begge faktorer positive tal. Bemærk, at 3 ikke går op i $x+y+z$, hvilket giver at $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz = (x+y+z)^2-3(xy+xz+yz) \equiv 1 \mod 3$. Da 2003 er et primtal og $2003 \equiv 2 \mod 3$, får vi at $x+y+z = 2003$. Da $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 2$, må ét af leddene være nul. Af symmetrigrunde kan vi antage at $x = y = z \pm 1$. Da $2003 \equiv 2 \mod 3$, virker kun $x = y = z+1$. Det giver $(x,y,z) = (668, 668, 667)$, og de eneste løsninger er de tre permutationer af denne.

Løsning 3. Drej $\triangle BCD$ omkring C, så B flyttes over i A. Punktet D flyttes over i et punkt E. Da $|CE| = |CD|$ og $\angle DCE = 60^\circ$, er trekant $\triangle CDE$ ligesidet. Det medfører at $\angle ADE = 90^\circ$, altså er $\triangle ADE$ retvinklet med sidelængder $|AD|$, $|AE| = |BD|$ og $|DE| = |CD|$.

Løsning 4. Tag et vilkårligt $x \in \mathbb{R}^*$. For alle $y \in \mathbb{R}^*$ hvor $y \neq x$, har vi at $f(y) + f(x-y) = f(y(x-y)f(x))$. Andengradsligningen (i y) $x - y = y(x-y)f(x)$ har de to løsninger $y = x$ og $y = \frac{1}{f(x)}$. (Husk at $f(x) \neq 0$.) Hvis $f(x) \neq \frac{1}{x}$, kan vi vælge $y = \frac{1}{f(x)} \neq x$ hvilket giver $f(y) = 0$, en modstrid. Derfor er $f(x) = \frac{1}{x}$ for alle $x \in \mathbb{R}^*$. Det ses let at denne funktion faktisk er en løsning og dermed den eneste.