Onsdag den 7. juli 2010

Opgave 1. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan at

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

gælder for alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Her betegner $\lfloor z \rfloor$ det største hele tal mindre end eller lig z.)

Opgave 2. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ABC og lad Γ være trekantens omskrevne cirkel. Lad linjen AI skære Γ i et punkt $D \neq A$. Lad E være et punkt på buen $\widehat{BDC}$ og F et punkt på siden BC sådan at

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Lad G være midtpunket af linjestykket IF. Vis at linjerne DG og EI skærer hinanden på Γ.

Opgave 3. Lad $\mathbb{N}$ være mængen af positive hele tal. Bestem alle funktioner $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sådan at

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

er et kvadrattal for alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan opnå 7 point

Language: **Danish**

Day: **2**

Torsdag den 8. Juli 2010

Opgave 4. Lad P være et punkt inden i trekant ABC. Linjerne AP, BP og CP skærer trekant ABC's omskrevne cirkel Γ i henholdsvis punkterne $K \neq A$, $L \neq B$ og $M \neq C$. Tangenten til Γ i C skærer linjen AB i S. Antag at $|SC| = |SP|$. Vis at $|MK| = |ML|$.

Opgave 5. I hver af de seks bokse $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ er der i begyndelsen én mønt. Der er to typer af tilladte operationer:

Type 1: Vælg en ikke tom boks B_j hvor $1 \leq j \leq 5$. Fjern én mønt fra B_j og tilføj to mønter til B_{j+1}.

Type 2 Vælg en ikke tom boks B_k hvor $1 \leq k \leq 4$. Fjern én mønt fra B_k og ombyt indholdet i boksene B_{k+1} og B_{k+2} (som muligvis er tomme).

Afgør om der findes en endelig følge af sådanne operationer der resulter i at boksene B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 er tomme og boks B_6 indeholder præcis $2010^{2010^{2010}}$ mønter. (Bemærk at $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Opgave 6. Lad $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en følge af positive reelle tal. Antag at der eksisterer et positivt helt tal s så

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

for alle $n > s$. Vis at der eksisterer positive hele tal ℓ og N, hvor $\ell \leq s$ og sådan at $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ for alle $n \geq N$.