Onsdag den 15. juli 2009

Opgave 1. Lad n være et positivt helt tal og lad $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) være forskellige hele tal i mængden $\{1, \ldots, n\}$ sådan at n går op i $a_i(a_{i+1} - 1)$ for $i = 1, \ldots, k - 1$.
Vis at n ikke går op i $a_k(a_1 - 1)$.

Opgave 2. Lad ABC være en trekant og lad O være centrum for trekantens omskrevne cirkel. Punkterne P og Q er indre punkter på henholdsvis siderne CA og AB. Lad K, L og M være midtpunkterne på henholdsvis linjestykkerne BP, CQ og PQ, og lad Γ være cirklen der går gennem K, L og M. Antag at linjen PQ er tangent til cirklen Γ.
Vis at $|OP| = |OQ|$.

Opgave 3. Antag at $s_1, s_2, s_3, \ldots$ er en strengt voksende følge af positive hele tal sådan at delfølgerne

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{og} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

begge er differensrækker.
Vis at følgen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ også er en differensrække.

Tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan give 7 point

Torsdag den 16. juli 2009

Opgave 4. Lad ABC være en trekant med $|AB| = |AC|$. Vinkelhalveringslinjerne for $\angle CAB$ og $\angle ABC$ rammer siderne BC og CA i henholdsvis D og E. Lad K være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ADC. Antag at $\angle BEK = 45°$.
Bestem alle mulige gradtal for $\angle CAB$.

Opgave 5. Bestem alle funktioner f fra mængden af positive hele tal til mængden af positive hele tal sådan at der, for alle positive hele tal a og b, eksisterer en ikke-degenereret trekant med sidelængder

$$a,\ f(b)\ \text{ og }\ f(b + f(a) - 1).$$

(En trekant er *ikke-degenereret* hvis dets hjørner ikke ligger på linje.)

Opgave 6. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være forskellige positive hele tal og lad M være en mængde af $n - 1$ positive hele tal som ikke indeholder $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En græshoppe skal springe langs den reelle talakse, startpunktet er 0 og foretage n spring til højre med springlængderne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i en eller anden rækkefølge.
Vis at rækkefølgen kan vælges på en sådan måde at græshoppen aldrig lander i et punkt fra M.