49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Onsdag den 16. juli 2008

Opgave 1. Lad ABC være en spidsvinklet trekant og lad H være højdernes skæringspunkt. Cirklen gennem H og med centrum i BC's midtpunkt skærer linjen BC i punkterne A_1 og A_2. På samme måde skærer cirklen gennem H og med centrum i CA's midtpunkt linjen CA i B_1 og B_2, mens cirklen gennem H og med centrum i AB's midtpunkt skærer linjen AB i C_1 og C_2. Vis at punkterne A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 og C_2 ligger på en og samme cirkel.

Opgave 2. **(a)** Vis at følgende ulighed gælder for alle reelle tal x, y og z forskellige fra 1 og som opfylder $xyz = 1$:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(b) Vis at der findes uendelig mange tripler af rationale tal x, y og z forskellige fra 1 og med $xyz = 1$ således at lighedstegnet gælder i uligheden ovenfor.

Opgave 3. Vis at der findes uendelig mange positive heltal n således at $n^2 + 1$ har en primfaktor større end $2n + \sqrt{2n}$.

Tid til disposition: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave bedømmes med op til 7 point