

Version: Danish

Første dag
25. juli 2007

Opgave 1. Reelle tal a_1, a_2, \dots, a_n er givet. For ethvert i ($1 \leq i \leq n$) sæt

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

og lad

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Bevis at der for alle reelle tal $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ gælder

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Vis at der findes reelle tal $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ så der gælder lighedstegn i (*).

Opgave 2. Betragt fem punkter A, B, C, D og E sådan at firkant $ABCD$ er et parallelogram og firkant $BCED$ har en omskrevet cirkel. Lad ℓ være en linje gennem A . Antag at ℓ skærer det indre af linjestykket DC i F og linjen BC i G . Antag derudover at $EF = EG = EC$. Bevis at ℓ er vinkelhalveringslinje for vinkel DAB .

Opgave 3. I en matematikkonkurrence er nogen af deltagerne venner. Venskab er altid gensidigt. Kald en samling af deltagere for en *klike* hvis ethvert par af dem er venner. (Specielt, er enhver samling af mindre end to deltagere en klike.) Antallet af personer i en klike kaldes dens *størrelse*.

Det er givet at den maksimale klike-størrelse i denne konkurrence er lige. Bevis at deltagerne kan fordeles i to rum sådan at den maksimale størrelse af klike indeholdt i det ene rum er den samme som den maksimale størrelse af klike indeholdt i det andet rum.

*Tid til rådighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd*