

45. Internationale Matematikolympiade

1. dag

Mandag den 12. juli 2004

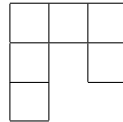
Opgave 1. Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $|AB| \neq |AC|$. Cirklen med diameter BC skærer siderne AB og AC i henholdsvis M og N . Lad O betegne midtpunktet af siden BC . Vinkelhalveringslinjerne til vinklerne BAC og MON skærer hinanden i punktet R . Vis, at de omskrevne cirkler til trekanterne BMR og CNR har et fælles punkt, som ligger på siden BC .

Opgave 2. Bestem alle polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter, som opfylder betingelsen

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

for alle reelle tal a, b, c , hvor $ab + bc + ca = 0$.

Opgave 3. Definer en *krog* som en figur opbygget af seks enhedskvadrater som vist i diagrammet



samt en figur, som opnås ved rotationer eller spejlinger af denne figur.

Bestem alle $m \times n$ rektangler, som kan dækkes med kroge, så

- rektanglet er dækket uden huller og uden overlap;
- ingen krogdele dækker et område udenfor rektanglet.

Varighed: 4 timer 30 minutter.

Hver opgave: 7 point.