

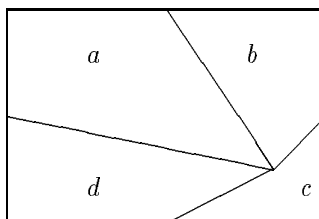
Georg Mohr konkurrencen i matematik 2002

Torsdag den 10. januar 2002 kl. 9-13

Tilladte hjælpemidler: kun skrive- og tegneredskaber

Opgave 1. Fra et indre punkt i et rektangel trækkes forbindelseslinier til de fire siders midtpunkter. Herved opstår 4 områder (polygoner) med arealerne a , b , c og d (se figur).

Bevis, at $a + c = b + d$.



Opgave 2. Bevis, at for ethvert helt tal n større end 5 kan et kvadrat deles i n kvadrater.

Opgave 3. To naturlige tal har summen 2002.

Kan 2002 gå op i de to tals produkt?

Opgave 4. I trekant ABC er $\angle C = 90^\circ$ og $|AC| = |BC|$. Desuden er M et indre punkt i trekanten, så $|MC| = 1$, $|MA| = 2$ og $|MB| = \sqrt{2}$.

Beregn $|AB|$.

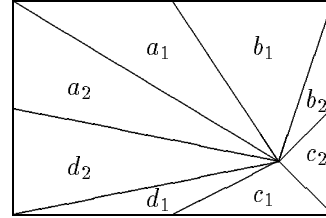
Opgave 5. Homer Grog har på 10 sedler skrevet tallene 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ét tal på hvert seddel. Han arrangerer sedlerne i en rundkreds og forsøger at få den største sum S af tallene på 3 på hinanden følgende sedler til at blive mindst mulig.

Hvad er den mindste værdi S kan antage?

Sponsorer: Georg Mohr Fonden, Dansk Matematisk Forening, Matematiklærerforeningen, UNI-C og Gyldendal.

Løsningskitser.

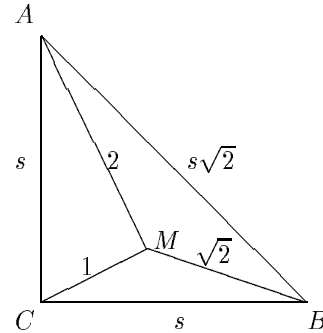
Opgave 1. Opdel områderne som vist. Så er $a_1 = b_1$ (trekanter med samme højde og grundlinie), $b_2 = c_2$, $c_1 = d_1$ og $d_2 = a_2$. Da $a+c = a_1+a_2+c_1+c_2$ og $b+d = b_1+b_2+d_1+d_2$, fås $a+c = b+d$.



Opgave 2. Antag, at kvadratet har sidelængde 1. For ethvert helt tal $k > 1$ kan det deles i et kvadrat med sidelængde $\frac{k-1}{k}$ omgivet på 2 af siderne af kvadrater med sidelængder $\frac{1}{k}$. Antallet af delkvadrater er så $2k$. Førstnævnte kvadrat kan yderligere deles i 4 lige store kvadrater, og så er antallet af delkvadrater $2k+3$. Da ethvert helt tal n større end 5 kan udtrykkes som $2k$ eller $2k+3$ for et helt tal $k > 1$, følger påstanden.

Opgave 3. Svaret er nej. Det bevises indirekte. Antag $a+b = 2002$ og $2002|ab$. Da $ab = a(2002-a) = 2002a - a^2$ og $2002|ab$ følger, at $2002|a^2$. Da yderligere 2002 er kvadrattfri ($2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$), fås $2002|a$; men det er i modstrid med $0 < a < 2002$.

Opgave 4. Da siderne i $\triangle AMB$ er $\sqrt{2}$ gange så store som siderne i $\triangle BMC$, er $\triangle AMB \sim \triangle BMC$. Heraf fås $\angle BMC = \angle BMA = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 180^\circ - (\angle MBC + \angle MBA) = 135^\circ$. Dermed $\angle CMA = 360^\circ - 2 \cdot \angle BMC = 90^\circ$. $\triangle AMC$ er altså retvinklet, og Pythagoras giver så $s = \sqrt{5}$ og dermed $|AB| = \sqrt{10}$.



Opgave 5. S kan presses ned på 29 for eksempel ved rækkefølgen $1 - 17 - 9 - 3 - 15 - 7 - 5 - 13 - 11 - 4$ (cyklisk). S kan ikke blive mindre. Begrundelse: Betragt de 3 grupper med 3 sedler, som ligger på pladserne 1-3, 4-6 og 7-9 efter sedlen med tallet 1. Summen af tallene i de 3 grupper er 84, og dermed er gennemsnitssummen for de 3 grupper 28. I en af de 3 grupper er der 3 ulige tal, og dermed er summen af tallene i denne gruppe ikke 28. Dermed vil en af de 3 grupper have en sum, der er større end gennemsnittet 28.