Retningslinjer for bedømmelsen
Georg Mohr-Konkurrencen 2022
2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

Opgave 1

- 2 point for a). Heraf 1 point for ét af følgende
  - Vise at væskens volumen er $\frac{3}{4}$ af prismets rumfang.
  - Udregne at væskens rumfang er 375 cm^3.
- 2 point for b). Heraf 1 point for ét af følgende
  - Bestemme højden af prismet på figur 3.
  - Argumentere for at på figur 3 er væskehøjden halvdelen af prismets højde.
  - Opnå ligningen $\frac{1}{2} \cdot h \cdot \Big(10\sqrt{2} + 2(5\sqrt{2} - h)\Big) \cdot 10 = 375$ eller tilsvarende, hvor h er væskehøjden i cm, eventuelt med symboler for nogle kendte størrelser.

Bemærkning 1: I svarene skal taludtrykkenes form ikke tillægges betydning, ligesom det ikke skal tillægges betydning om taludtrykket er fuldt reduceret eller i spørgsmål b) givet med en brøk- eller decimalbrøkstilnærmelse. Det skal heller ikke tillægges betydning om svaret er givet med eller uden enhed. I spørgsmål a) skal for eksempel 7,5 cm, $7\frac{1}{2}$, $\frac{15}{2}$ og $\frac{375}{50}$ cm alle regnes for rigtige svar, og i spørgsmål b) skal for eksempel svarene $5\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{5}{\sqrt{2}}$ cm, $\sqrt{\frac{125}{10}}$, $3\frac{1}{2}$ og 3,54 cm alle regnes for rigtige. I mellemregninger skal det heller ikke tillægges betydning om der regnes med enheder, eller om en eventuel brug af enheder er konsistent. Endelig skal det i spørgsmål b) ikke tillægges betydning om andengradsligningen løses formelt, grafisk eller numerisk, blot svaret er rimelig nøjagtigt.

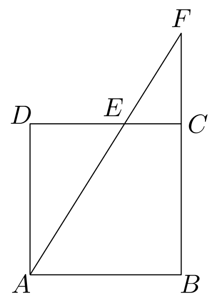
Bemærkning 2: En mindre regnefejl koster $\frac{1}{2}$ point, men er der flere regnefejl, kan de samlet højst koste 1 point i begge delspørgsmål tilsammen. Ved regnefejl forstås her dels fejl i formelle beregninger som ikke afspejler en svigtende forståelse, såsom visse fortegnsfejl, dels fejl i talregning som ikke blot kan henregnes til grov eller inkonsistent afrunding i regning med decimalbrøkstilnærmelser.

Bemærkning 3: Hvis det i spørgsmål b) blot antages uden bevis at prismet er fyldt op i den halve højde, gives der kun point for bestemmelse af højden af prismet.

Opgave 2

- 2 point for at angive samtlige hyggelige palindromer.
  - Heraf 1 point for at angive mindst ét hyggeligt palindrom.
- 2 point for at argumentere for at der ikke er andre.
  - Heraf 1 point for at vise enten at 11 går op i AB, eller at 11 går op i EF, eller at $A = B$, eller at $E = F$.

Opgave 3



Betegnelser: $|AE| = a$, $|AF| = b$, $|DE| = p$, $|BF| = q$,
$u = \angle DAF = \angle AFB$, $v = \angle AED = \angle FAB$.

a) Ligedannethed eller Pythagoras' sætning anvendt på tre trekanter

Følgende point er ikke additive

- 1 point for at bemærke at ADE og ABF er ensvinklede (eller tilsvarende som kan give én af relationerne $\frac{1}{a} = \frac{q}{b}$, $\frac{p}{a} = \frac{1}{b}$ og $\frac{1}{p} = \frac{q}{1}$).
- 1 point for at indlægge koordinatsystem og opskrive en ligning for linjen AF som kan give én af relationerne $\frac{1}{a} = \frac{q}{b}$, $\frac{p}{a} = \frac{1}{b}$ og $\frac{1}{p} = \frac{q}{1}$.
- 1 point for at udtrykke Pythagoras' sætning for alle tre trekanter ADE, ABF og ECF ved a, b, p og q eller tilsvarende variable.
- 2 point for at vise at $p + q = ab$.
- 2 point for at vise at $\frac{1}{a} = \frac{q}{b}$, og yderligere 1 point at vise at $b^2 = q^2 + 1$.
- 2 point for at vise at $\frac{p}{a} = \frac{1}{b}$, og yderligere 1 point at vise at $a^2 = p^2 + 1$.
- 2 point for at vise at $pq = 1$, og yderligere 1 point at vise at $b^2 = q^2 + 1$ og $a^2 = p^2 + 1$.

b) Dreje trekant

- 1 point for at dreje $\triangle AED$ eller $\triangle ABF$ om A så AD og AB falder sammen, og bemærke at de danner en trekant med ret vinkel i A.
- Yderligere 1 point for at vise at hypotenusen i denne trekant har længde ab.
- Yderligere 1 point for at anvende Pythagoras' sætning på trekanten.

c) Konstruere retvinklet trekant med kateter af længde $\frac{1}{a}$ og $\frac{1}{b}$

- 1 point for at konstruere en retvinklet trekant som kan vises at have kateter $\frac{1}{a}$ og $\frac{1}{b}$ og hypotenuse 1.
- Yderligere 2 point for at argumentere for at længderne af siderne er henholdsvis $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og 1 (der gives 1 af disse point for argument for længden af mindst en af kateterne).

Bemærkning: Dette kan gøres på flere måder. For eksempel ved at tegne højden fra B i trekant ABF, tegne højden fra D i trekant ADE eller tegne transversalen i trekant ABF parallel med AB gennem det punkt på AF som har afstand 1 fra F.

d) Trigonometri

- 1 point for at bemærke at $\angle DAF = \angle AFB$ (eller $\angle AED = \angle FAB$).
- 1 point for at vise at $\cos(u) = \frac{1}{a}$ eller $\sin(u) = \frac{1}{b}$ og yderligere 1 point for at vise begge. (Tilsvarende for $\cos(v) = \frac{1}{b}$ og $\sin(v) = \frac{1}{a}$).

Opgave 4

Lad $s_i, i = 1, \ldots, n$, betegne antal sorte felter i række i og tilsvarende $h_i, i = 1, \ldots, n$, betegne antal hvide felter i række i.

- 1 point for at nævne at $h_i = n - s_i$, eller tilsvarende.
- Yderligere 1 point for at opstille et udtryk for $S - H$ der kun afhænger af n og k.
- Yderligere 1 point for at vise at $n \in \{1, 7, 49\}$

Bemærkning: Hvis ingen andre point gives, giver det 1 point at angive begge løsninger.

Opgave 5

Lad k betegne tallet der til slut skal stå ved alle hjørner, og x_i, $i = 1, \ldots, n$, antal træk hvor der lægges 1 til tallene ved hjørne nummer i og $i + 1$ (ved $i = n$ dog n og 1).

- 2 point for at bevise at det er muligt for alle ulige n. Heraf 1 point for ét af følgende:
  - uden bevis angive en algoritme der fører til at alle tallene er ens.
  - opstille et system af n ligninger i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og k og reducere det til en ligning med kun én af de variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- 2 point for at bevise at det ikke er muligt for nogen lige n. Heraf 1 point for ét af følgende:
  - betragte den alternerende sum af alle n tal eller summen af tallene ved alle hjørner med lige nummer og summen af alle hjørner med ulige nummer.
  - opstille et system af n ligninger i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og k og eliminere $n - 2$ variable.

Bemærkning: Hvis ingen andre point gives, gives der 1 point for hypotesen: Det er muligt for alle ulige n, men ikke muligt for nogen lige n.