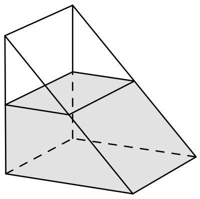
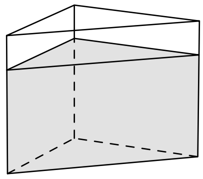
Georg Mohr-Konkurrencen 2022 - Anden runde
Tirsdag den 11. januar 2022 kl. 9-13
Løsningsforslag

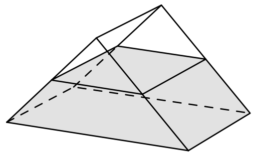
Opgave 1. Figuren viser et glasprisme der er delvis fyldt med væske. Prismets overflade udgøres af to retvinklede, ligebenede trekanter, to kvadrater med sidelængde 10 cm og et rektangel. Prismet kan ligge på tre forskellige måder. Hvis prismet ligger som vist på figur 1, er væskehøjden 5 cm.



figur 1



figur 2

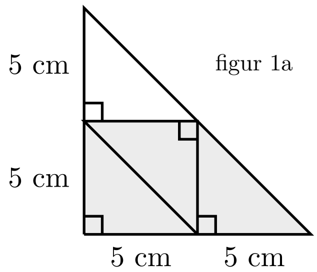


figur 3

a) Hvad er væskehøjden i prismet når det ligger som vist på figur 2?

b) Hvad er væskehøjden i prismet når det ligger som vist på figur 3?

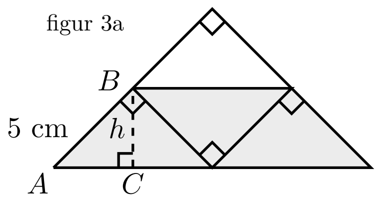
Løsning Vi vil først indse at væskens rumfang udgør $\frac{3}{4}$ af prismets rumfang.



Den trekant der udgør endefladen på prismet i beliggenheden på figur 1, kan opdeles i fire ens retvinklede, ligebenede trekanter som vist på figur 1a. Arealet af den grå del af endefladen udgør dermed $\frac{3}{4}$ af hele endefladens areal. Da rumfanget findes ved at gange endefladens areal med længden 10 cm, vil rumfanget af væsken dermed udgøre $\frac{3}{4}$ af hele prismets rumfang.

a) Når prismet ligger som på figur 2, kan rumfanget findes ved at gange grundfladens areal med prismets højde 10 cm. Da prismet og væsken i denne beliggenhed har samme grundflade, må væskens højde være $\frac{3}{4}$ af prismets højde, dvs. $\frac{3}{4} \cdot 10$ cm $= 7{,}5$ cm.

b) Når prismet ligger som på figur 3, kan vi ligesom i beliggenhed 1 udtrykke rumfanget som endefladens areal ganget med længden 10 cm. Et væskerumfang på $\frac{3}{4}$ af prismets rumfang opnås dermed ved et areal på $\frac{3}{4}$ af endefladens areal, altså netop arealet af de tre nederste småtrekanter vist på figur 3a, markeret med gråt.



Væskehøjden kan nu findes som højden h i en af de små trekanter. Trekant ABC er retvinklet og ligebenet. Pythagoras' sætning giver da $h^2 + h^2 = 5^2$, hvoraf $h^2 = \frac{25}{2}$, og dermed $h = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Væskehøjden i beliggenhed 3 er altså $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

Opgave 2. Et positivt helt tal er et *palindrom* hvis det skrives ens forfra og bagfra. For eksempel er 285582 et palindrom. Et sekscifret tal ABCDEF, hvor A, B, C, D, E, F er cifre, kaldes *hyggeligt* hvis AB går op i CD, og CD går op i EF. For eksempel er 164896 hyggeligt.

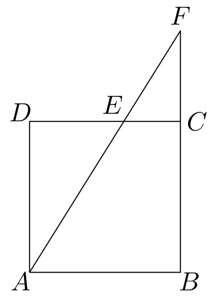
Bestem alle hyggelige palindromer.

Løsning Bemærk først at alle tal på formen AAAAAA (dvs. tallene 111111, 222222, ..., 999999) opfylder betingelsen: De er alle palindromer (skrives ens forfra og bagfra), og de er alle hyggelige (AA går op i AA, og AA går op i AA). Vi beviser nu at der ikke findes andre hyggelige palindromer end disse.

Lad ABCDEF være et sekscifret palindrom. Så er A=F, B=E og C=D. Tallet kan altså skrives ABCCBA. Hvis tallet ABCCBA er hyggeligt, går CC op i BA. Da 11 går op i ethvert tocifret tal bestående af to ens cifre, går 11 op i CC og dermed også i BA. Tallet BA er således et tocifret tal hvori 11 går op, dvs. et af tallene 11, 22, ..., 99, og derfor må A og B være ens: BA=AA. Men så er også AB=AA, og tallet kan skrives AACCAA. Hyggelighedsbetingelsen fortæller nu dels at AA går op i CC, og dels at CC går op i AA. Dermed er AA=CC. Cifrene A og C er således ens. Følgelig er alle seks cifre i ABCCBA ens. De eneste mulige hyggelige palindromer er dermed tallene AAAAAA, hvor A= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Opgave 3. Kvadratet $ABCD$ har sidelængde 1. Punktet E ligger på siden CD. Linjen gennem A og E skærer linjen gennem B og C i punktet F.

Bevis at $\dfrac{1}{|AE|^2} + \dfrac{1}{|AF|^2} = 1$.



Løsning

Bemærk først at trekant DAE er ensvinklet med trekant BFA. De er nemlig begge retvinklede, og $\angle DAE = \angle BFA$ fordi linjerne DA og BF er parallelle. Da trekanterne er ensvinklede, er forholdet mellem tilsvarende sider ens:

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AF|},$$

og dermed, da $|AB| = 1$, er altså

$$|DE| = \frac{|AE|}{|AF|}.$$

Pythagoras' sætning anvendt på trekant DAE, hvor jo $|AD| = 1$, fortæller nu at

$$1^2 + \left(\frac{|AE|}{|AF|}\right)^2 = |AE|^2.$$

Ved division med $|AE|^2$ fås heraf

$$\frac{1}{|AE|^2} + \frac{1}{|AF|^2} = 1,$$

hvilket skulle bevises.

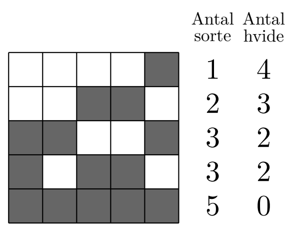
Opgave 4. Georg leger følgende leg. Han vælger to positive hele tal n og k. På et $n \times n$ - bræt hvor alle felter er hvide, maler Georg k af felterne sorte. Så tæller han hvor mange sorte felter der er i hver række, tager kvadratet af hvert af disse n tal og lægger kvadraterne sammen. Resultatet kalder han S. På samme måde tæller han antallet af hvide felter i hver række, tager kvadratet af hvert af disse n tal og lægger kvadraterne sammen. Resultatet kalder han H. Georg vil gerne opnå at $S - H = 49$.

Bestem samtlige værdier af n og k for hvilke dette kan lade sig gøre.

Eksempel: Hvis Georg vælger $n = 5$ og $k = 14$, kan han for eksempel male brættet som vist. Da er

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 9 + 25 = 48,$$
$$H = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 16 + 9 + 4 + 4 + 0 = 33,$$

så her er $S - H = 48 - 33 = 15$.



Løsning Lad tallene n og k være valgt, og lad k af felterne være malet sorte. Da n^2 er det samlede antal felter, kan kun k med $k \leq n^2$ komme i betragtning. Lad s_1, s_2, ..., s_n være antallet af sorte felter i hver af de n rækker. Antallet af hvide felter i hver af de n rækker er da $n - s_1$, $n - s_2$, ... , $n - s_n$. Dermed er

$$S = {s_1}^2 + {s_2}^2 + ... + {s_n}^2$$

og

$$\begin{aligned} H &= (n - s_1)^2 + (n - s_2)^2 + ... + (n - s_n)^2 \\ &= (n^2 + {s_1}^2 - 2ns_1) + (n^2 + {s_2}^2 - 2ns_2) + ... + (n^2 + {s_n}^2 - 2ns_n) \\ &= n \cdot n^2 + ({s_1}^2 + {s_2}^2 + ... + {s_n}^2) - 2n(s_1 + s_2 + ... + s_n) \\ &= n^3 + S - 2nk, \end{aligned}$$

idet k er det samlede antal sorte felter $s_1 + s_2 + ... + s_n$. Vi har da

$$S - H = -n^3 + 2nk = n(2k - n^2).$$

Betingelsen for at det kan lykkes at opnå $S - H = 49$, er nu at $k \leq n^2$, og at

$$49 = n(2k - n^2).$$

Da $49 = 7^2$, og 7 er et primtal, viser denne faktorisering at mulighederne er

1. $n = 1$ og $2k - n^2 = 49$,
2. $n = 7$ og $2k - n^2 = 7$, og
3. $n = 49$ og $2k - n^2 = 1$.

Mulighed 1. giver $k = \frac{49+1}{2} = 25$ og må udelukkes da k her er større end $n^2 = 1$.
Mulighed 2. giver $k = \frac{7+49}{2} = 28$ og kan bruges da $28 \leq 7^2$.
Mulighed 3. giver $k = \frac{1+49^2}{2} = \frac{1+2401}{2} = 1201$ og kan ligeledes bruges da $1201 \leq 2401 = 49^2$.

De brugbare værdier af n og k er derfor $(n, k) = (7, 28)$ og $(n, k) = (49, 1201)$. I hver af de to situationer kan de k malede felter placeres helt frit.

Opgave 5. Lad $n > 2$ være et helt tal. Tallene $1, 2, \dots, n$ er skrevet på hjørnerne af en n-kant i denne rækkefølge. Et træk består i at vælge to nabohjørner og lægge 1 til hvert af deres tal.

Bestem alle n for hvilke man kan opnå at alle tallene er ens efter et endeligt antal træk.

Løsning Svar: de ulige tal. Vi viser først at det *ikke* kan lade sig gøre for n lige, dernæst at det *kan* lade sig gøre for n ulige.

Lad n være et lige tal. Vi nummererer hjørnerne efter de tal der er skrevet på dem, og opdeler herefter hjørnerne i to grupper, A og B, bestående af henholdsvis alle hjørner med et ulige nummer og alle hjørner med et lige nummer. Da n er lige, er de to grupper lige store. Bemærk nu at et træk vil forøge to nabotal med 1; summen af tallene i gruppe A og summen af tallene i gruppe B vil derfor begge forøges med 1. Men det betyder at differensen mellem de to nævnte summer ikke ændres når et træk udføres. Hvis alle tallene efter et vist antal træk var ens, ville denne differens på det tidspunkt være 0. Men så skulle den også have været 0 fra start, og det er den ikke: Hvert tal i A efterfølges af et i B der er større, og summen af B-tallene er således større end summen af A-tallene. Man kan altså ikke opnå at alle tallene er ens.

Lad nu n være et ulige tal. Vi definerer først et supertræk som følgende kombination af træk: Ud fra et givet hjørne udføres først hvert af de to træk der involverer hjørnet; herefter opdeles de resterende hjørner i nabopar (hvilket kan lade sig gøre da det resterende antal hjørner, $n - 3$, er lige), og på hvert nabopar udføres et træk. Den samlede effekt af et supertræk er dermed at der lægges 2 til et bestemt hjørne og 1 til alle de øvrige. Med brug af supertræk kan alle tallene nu successivt gøres ens. Først benyttes et supertræk på det næstsidste hjørne, hvorefter det næstsidste tal og det sidste tal er lige store, mens forskellen mellem det tredjesidste og det næstsidste er øget til 2. Herefter benyttes to supertræk på det tredjesidste hjørne, hvorefter de tre sidste tal er lige store, mens forskellen mellem det fjerdesidste og det tredjesidste er øget til 3. Med nu tre supertræk på det fjerdesidste hjørne bliver de fire sidste tal lige store. Efter samme princip fortsættes hele vejen ned indtil alle tal er lige store.