# Retningslinjer for bedømmelsen
# Georg Mohr-Konkurrencen 2021
# 2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

## Opgave 1

Der gives følgende point for hver del, dog samlet højst 4 point.

- 1 point for en figur der viser (a). Figuren accepteres også hvis nogle af pindene krydser hinanden.
- 2 point for at bevise (b).
  - Heraf får man 1 point for uden begrundelse at skrive at der skal være et lige antal pinde.
- 2 point for at bevise at man ikke kan lave en figur med sættet af pinde fra (c).
  - Heraf får man 1 point for uden begrundelse at skrive at pindenes samlede længde skal være lige.

## Opgave 2

De beskrevne point kan opnås enkeltvis selv om konklusionen er forkert.

*a. Fordelinger på de mulige udfald af et kast*

- 1 point for at vise forståelse af at tallenes gennemsnit eller sum kun afhænger af fordelingen af de 17 kast på de 4 mulige udfald.
- 3 point for at beregne gennemsnittet eller summen for hver af de 56 mulige fordelinger, påvise at i intet af tilfældene er gennemsnittet et helt tal, og konkludere at svaret på opgaven er nej. Efter censorernes skøn fratrækkes ét eller flere point for manglende fordelinger og/eller regnefejl.

*b. Nedre og øvre grænse*

- 1 point for at udtrykke summen af de 17 tal på en form som er egnet som udgangspunkt for en bestemmelse af dens mindste- og størsteværdi, for eksempel $42+a+b+c+d+e$, hvor $a$, $b$, $c$, $d$ og $e$ er 5 resterende udfald efter at 3 af hver slags er taget fra, eller $2x+3y+4z+5w$, hvor $x$, $y$, $z$ og $w$ er antallene af 2-ere, 3-ere, 4-ere og 5-ere.
- 1 point for at begrunde at summen mindst er 52.
- 1 point for at begrunde at summen højst er 67.
- 1 point for at begrunde at gennemsnittet ikke er et helt tal for noget helt tal i dette interval, og konkludere at svaret på opgaven er nej.

*Bemærkning:* Blandt de udtryk der udløser det første point, regnes også sådanne hvor for eksempel én af de variable $x$, $y$, $z$ og $w$ er elimineret med brug af betingelsen $x+y+z+w=17$, og sådanne hvor et multiplum af 17 er adderet.

*c. Restklasseregning*

- 1 point for at udtrykke summen som $2x+3y+4z+5w$ eller lignende *), hvor $x$, $y$, $z$, $w$ er antallene af 2-ere, 3-ere, 4-ere og 5-ere.
- 1 point for at omforme den betingelse at 17 går op i summen, til en modulær kongruens hvor udtrykkene på kongruensens venstre og højre side hver for sig antager mindre end 16 værdier.
- 1 point for nøjagtigt at beskrive mængderne af de værdier der kan optræde på hver af kongruensens sider, og i tilfælde af overlap hvilke andre givne relationer der udelukker at samme værdi optræder samtidig på begge sider.
- 1 point for at udlede at kongruensen ikke kan opfyldes, og konkludere at svaret på opgaven er nej.

*) Et lignende udtryk er for eksempel $42+2x'+3y'+4z'+5w'$, hvor $x'=x-3$ osv., eller sådanne hvor én af de variable $x$, $y$, $z$ og $w$ er elimineret med brug af betingelsen $x+y+z+w=17$, eller tilsvarende med andre variable, og/eller et multiplum af 17 er adderet.

## Opgave 3

Begrebet restklasse forudsættes ikke anvendt i besvarelsen.

- 1 point for fremstillinger af tallene 2 og 4-6 på den angivne form. Hvis kravene til de følgende tre point i det væsentlige er opfyldt, behøves dog kun fremstillinger af en repræsentant, som ikke nødvendigvis er én af de nævnte, for hver restklasse modulo 4 undtagen restklassen 3 modulo 4. (Hvor eksempler er givet i opgaveteksten).
- 2 point at vise at summen af fire på hinanden følgende kvadrattal med fortegn $+$, $-$, $-$ og $+$ er lig med 4.
  - Heraf kan der gives 1 point for at vise $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ eller tilsvarende.
- 1 point for at udlede $n \in M \Rightarrow n \pm 4 \in M$, hvor $M$ er mængden af hele tal der kan skrives på den angivne form, slutte at hvis en repræsentant for en restklasse modulo 4 tilhører $M$, så er hele restklassen indeholdt i $M$, og konkludere at alle hele tal kan skrives som angivet.

*Bemærkning 1:* De beskrevne point kan opnås enkeltvis selv om konklusionen er forkert.

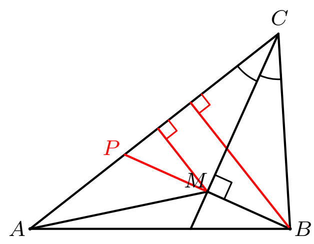
*Bemærkning 2:* Den tomme sum kan anerkendes som repræsentant for restklassen 0 modulo 4.

*Bemærkning 3:* Det giver ikke i sig selv point at vise $n \in M \Rightarrow -n \in M$ og/eller $n \in M \Rightarrow n+2 \in M \vee n-2 \in M$.

*Bemærkning 4:* Der findes tilsvarende konstruktioner hvor man fx viser at summen af 8 på hinanden følgende kvadrattal med fortegn $+$, $-$, $+$, $-$, $-$, $+$, $-$ og $+$ er lig med 16. Hvis summen er 16, anvendes skemaet med 16 i stedet for 4, og tilsvarende ved andre konstruktioner af denne art.

## Opgave 4

*a. Forlængelse af $BM$*

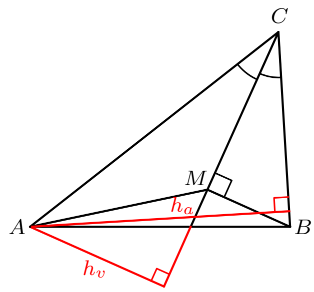



- 1 point for at indføre skæringspunktet $P$ mellem linjerne $AC$ og $BM$.
- 2 point fordelt på én af følgende måder.

  Enten:
  - 1 point for at vise $|BP| = 2|MP|$.
  - 1 point for at udlede at højden fra $B$ i trekant $ABC$ er dobbelt så lang som højden fra $M$ i trekant $AMC$.

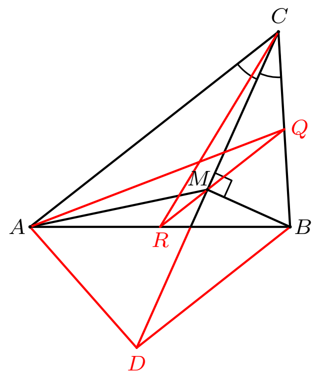
  Eller:
  - 1 point for at vise at trekanterne $CMB$ og $CMP$ har lige store arealer.
  - 1 point for at vise at trekanterne $AMB$ og $AMP$ har lige store arealer.
- 1 point for at udlede at arealet af trekant $AMC$ er lig med halvdelen af arealet af trekant $ABC$.

*b. Højder*




- 1 point for at indføre højderne $h_a$ og $h_v$ fra $A$ i trekanterne $ABC$ og $AMC$.
- 1 point for at begrunde at $h_a$ og $h_v$ begge er proportionale med $|CA|$ når $B$, $C$ og $\angle C$ holdes fast, og $A$ varieres.
- 1 point for at udlede at også arealerne af trekanterne $ABC$ og $AMC$ er proportionale med $|CA|$, og påvise at for $|CA| = |CB|$ er førstnævnte areal dobbelt så stort som sidstnævnte.
- 1 point for at udlede at arealet af trekant $AMC$ er lig med halvdelen af arealet af trekant $ABC$.

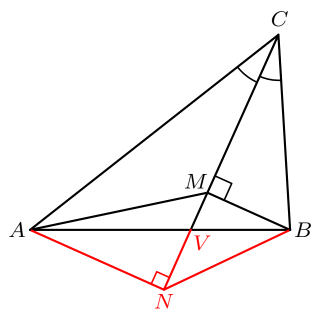
*c. Medianer*




Punkt $D \neq C$ ligger på vinkelhalveringslinjen så $|DB| = |CB|$, punkt $Q$ er midtpunktet af $CB$, og punkt $R$ er midtpunktet af $AB$.

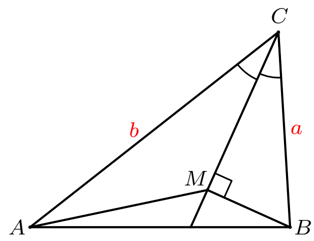
- 1 point for at indføre ét af punkterne $D$, $Q$ eller $R$.
- 2 point for at vise $DB \parallel AC$, $MQ \parallel AC$ eller $RM \parallel AC$.
  - Heraf kan der gives 1 point for at vise $\angle CDB = \angle DCB$ eller $\angle CMQ = \angle MCQ$.
- 1 point for at udlede at arealet af trekant $ABC$ er lig med arealet af trekant $ADC$, eller udlede at arealet af trekant $AMC$ er lig med arealet af én af trekanterne $AQC$ og $ARC$, og konkludere at arealet af trekant $AMC$ er lig med halvdelen af arealet af trekant $ABC$.

*d. Ensvinklede trekanter*




- 1 point for at indføre projektionen $N$ af $A$ på vinkelhalveringslinjen.
- 1 point for at vise $\triangle CNA \sim \triangle CMB$ og $\triangle VNA \sim \triangle VMB$, hvor $V$ er vinkelhalveringslinjens endepunkt.
- 1 point for at udlede at trekanterne $CMA$ og $CNB$ har lige store arealer, og trekanterne $VMA$ og $VNB$ har lige store arealer.
- 1 point for at udlede at summen af arealerne af trekanterne $CMA$ og $CNB$ er lig med arealet af trekant $ABC$, og konkludere at arealet af trekant $AMC$ er lig med halvdelen af arealet af trekant $ABC$.

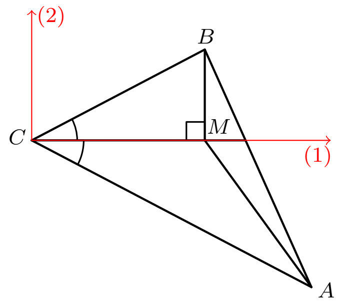
*e. Trigonometri*




Betegnelser: $a = |CB|$, $b = |CA|$, $C = \angle ACB$.

- 1 point for at udtrykke arealet af trekant $ABC$ ved $a$, $b$ og $C$.
- 1 point for at udtrykke arealet af trekant $AMC$ ved $a$, $b$ og $C$.
- 2 point for at udlede at arealet af trekant $AMC$ er lig med halvdelen af arealet af trekant $ABC$.
  - Heraf kan der gives 1 point for en analyse af tilfældet $a = b$.

*f. Koordinatregning*




Følgende skema tager udgangspunkt i en løsning hvor koordinatsystemet lægges med punktet $C$ som begyndelsespunkt og vinkelhalveringslinjen som førsteakse. Ved andre analytiske løsninger gives der tilsvarende point for tilsvarende skridt.

- 1 point for at indføre koordinatsystemet.
- 2 point for at udtrykke arealet af trekant $ABC$ hensigtsmæssigt ved koordinater til $A$ og $B$ og eventuelt en hældningskoefficient for én af linjerne $CA$ og $CB$.
  - Heraf kan der gives 1 point for et hensigtsmæssigt udtryk for vinkelhalveringslinjens længde.
- 1 point for at udtrykke arealet af trekant $AMC$ hensigtsmæssigt ved koordinater til $A$ og $B$ og eventuelt en hældningskoefficient for én af linjerne $CA$ og $CB$ og påvise at udtrykket er halvdelen af udtrykket for arealet af trekant $ABC$.

## Opgave 5

Alma kan begynde med et vandret eller et lodret træk og har i begge tilfælde en vindende strategi. Hvis første træk er vandret, består den i altid at flytte brikken længst muligt i vandret retning. Det følgende tager udgangspunkt i denne strategi. Hvis deltageren beskriver strategien med lodrette træk, anvendes pointskemaet med tilsvarende ændringer.

- 1 point for at beskrive den vindende strategi.
- 1 point for at vise at efter hvert af Almas træk befinder brikken sig på et sort felt med ét eller to hvide nabofelter som ligger i samme lodrette søjle, og som hver for sig er hjørnefelt i et hvidt rektangel helt omgivet af sorte felter eller kanter af brættet.
- 1 point for vise at hvert nydannet sådant rektangel er bredere end det er højt.
- 1 point for at vise at i denne situation kan Bertha ikke forhindre Almas næste træk, og udlede at spillet slutter før eller siden ved at Bertha ikke kan trække.