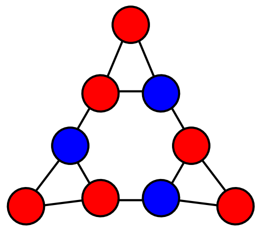
Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2020
2. runde

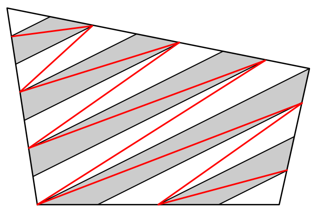
Opgave 1. Bemærk først at det er umuligt at farve de tre cirkler i en hjørnetrekant så alle tre streger giver point. Da der kun er to farver til rådighed, vil mindst en af de tre streger nemlig have samme farve cirkel i hver ende og dermed ikke give point. For hver af de tre hjørnetrekanter er der således mindst en streg der ikke giver point. I den samlede figur kan der derfor ikke være over $12 - 3 = 9$ pointgivende streger.

At det faktisk *er* muligt at få 9 point, ses af følgende eksempel:



Det højest mulige antal point er altså 9.

Opgave 2. Med de viste hjælpelinjer opdeles firkanten i en række par af trekanter. Hvert par består af en hvid og en grå trekant der har en side fælles; med denne side som grundlinje har de to trekanter samme højde fordi striberne er lige brede, og derfor har de så samme areal. Det samlede hvide areal har derfor samme størrelse som det samlede grå areal, og firkantens areal er derfor $2 \cdot 10 = 20$.



Opgave 3. Lad n være et tal der opfylder betingelserne. Så kan n skrives på formen

$$n = 10a + b,$$

hvor a er et positivt helt tal, og hvor b er et af tallene $1, 2, \dots, 9$. Det tal der fremkommer af n ved at indsætte et nul foran sidste ciffer, kan dermed skrives $100a + b$. Ifølge c) går n op i dette tal. Da n også går op i tallet

$$10n = 100a + 10b,$$

går n op i $9b$ fordi

$$9b = (100a + 10b) - (100a + b).$$

Det betyder at der findes et positivt helt tal k så $k \cdot (10a + b) = 9b$. Denne ligning omskrives til

$$10ka = (9 - k)b.$$

Heraf ses at 5 går op i tallet $(9 - k)b$ og dermed, da 5 er et primtal, i enten $9 - k$ eller b. Vi ser på disse tilfælde hver for sig.

Hvis 5 går op i $9 - k$, må $k = 4$, og ligningen lyder $40a = 5b$, så at $b = 8a$. Da b er et ciffer mellem 1 og 9, er eneste mulighed $b = 8$ og $a = 1$. Her fås altså $n = 18$.

Hvis 5 går op i b, må $b = 5$. Nu er n så et mindst to-cifret tal der slutter på 5, og som går op i $9b = 45$. Vi har altså her $n = 15$ eller $n = 45$.

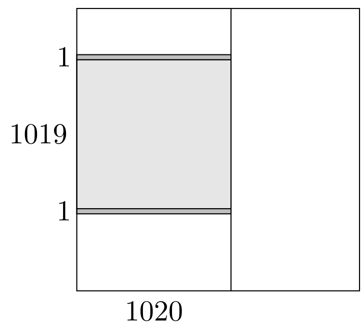
De eneste muligheder for n er altså tallene 15, 18 og 45. At alle disse tre muligheder faktisk dur, ses af at $105 = 7 \cdot 15$, $108 = 6 \cdot 18$ og $405 = 9 \cdot 45$.

Opgave 4. Lad a og b være sidelængderne af de oprindelige papstykker. Når en elev klipper sit papstykke ud i kvadrater med sidelængden s, må hver af sidelængderne a og b være et helt tal gange s, dvs. a og b kan skrives $a = ns$ og $b = ms$, hvor n og m er hele tal. Heraf følger at $\frac{a}{b} = \frac{ns}{ms} = \frac{n}{m}$. Brøken $\frac{n}{m}$ kan skrives som en uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$, hvor p og q er positive hele tal. Da $\frac{p}{q}$ er fremkommet ved forkortning af $\frac{n}{m}$, vil tallet p gå op i tallet n, og tallet q vil gå op i tallet m. Derfor vil p og q også gå op i $n \cdot m$, som er antallet af kvadrater for den pågældende elev.

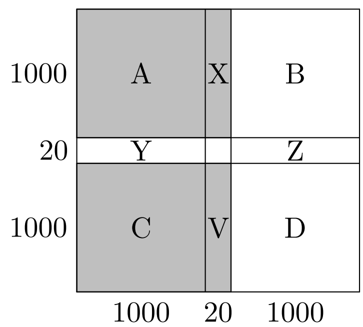
Bemærk nu at når argumentet gentages for en anden elev, vil s og dermed m og n muligvis være andre tal, men da brøken $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, vil vi få den samme uforkortelige brøk $\frac{p}{q}$. Tallene p og q er derfor ens for alle eleverne. Da p går op i hver eneste elevs antal kvadrater, vil p også gå op i det samlede antal kvadrater. Men da dette samlede antal N er et primtal, må p være lig med 1 eller N. Den sidste mulighed udelukkes, da N er en sum af tal hvori p går op, og derfor større end p. Altså er $p = 1$. Med samme argument fås $q = 1$. Altså er $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = 1$. Sidelængderne a og b er derfor ens, dvs. de oprindelige papstykker er kvadratiske.

Opgave 5. Svaret er 2000. Vi viser først at det er nødvendigt med mindst 2000 spioner. Bagefter viser vi at 2000 er nok.

Lad os se på et bræt med spioner placeret så Alma altid kan afgøre hvor Bertha har placeret sit kvadrat. Hvis vi ser på de 1020 felter længst til venstre i en af de øverste 1000 rækker og de tilsvarende 1020 felter længst til venstre i rækken 1020 rækker længere nede, så må der stå mindst en spion på disse 2040 felter; ellers ville Almas spioner nemlig ikke kunne bruges til at skelne mellem de to kvadrater som kun afviger med disse felter.



Det betyder at hvis man i de øverste 1000 rækker og de nederste 1000 rækker betragter de 1020 felter længst til venstre, så står der mindst 1000 spioner på disse felter tilsammen. Det svarer til mindst 1000 spioner i de markerede områder på figuren.



Hvis vi lader bogstaverne på figuren angive antallet af spioner i hvert område, har vi altså at

$$A + X + C + V \geq 1000.$$

Med samme argument baseret på de 1020 felter længst til højre fås

$$B + X + D + V \geq 1000.$$

Videre fås med tilsvarende argumenter først ud fra de 1020 øverste felter i en søjle og bagefter de 1020 nederste felter at

$$A + Y + B + Z \geq 1000,$$

$$C + Y + D + Z \geq 1000.$$

Ved at lægge venstresiderne sammen får vi nu

$$2 \cdot (A + B + C + D + X + Y + Z + V) \geq 4000,$$

hvormed $A + B + C + D + X + Y + Z + V \geq 2000$. Der står altså mindst 2000 spioner på brættet.

Omvendt kan 2000 spioner placeres så de med sikkerhed viser placeringen af Berthas kvadrat. Anbring 1000 spioner på de første 1000 pladser i række nr. 1001, og anbring 1000 spioner på de øverste 1000 pladser i søjle nr. 1001. Tænk på et 1020×1020-kvadrat. De 1000 vandret placerede spioner afslører da kvadratets vandrette position, og de 1000 lodret placerede spioner afslører dets lodrette position. Altså er kvadratets placering fastlagt ved hjælp af de 2000 spioner.